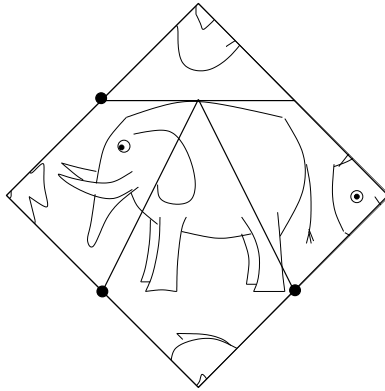


# Petit livret mathémagique brestois 2025

par des mathématiciens et mathématiciennes de l'Université de  
Brest (UBO)



Animations et livret réalisés et financés par :

- le Département de Mathématiques de l'UBO
- le Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique (LMBA, UMR CNRS 6205)
- l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Brest



# Table des matières

<b>I Animations</b>	<b>5</b>
1 Tour de magie : le comptage de cubes (par le théorème des restes chinois)	5
2 Le théorème de Pythagore en puzzle	6
3 Découpage et pavage : Carréléphant et Poissoncèle	11
4 L'identité d'Euler sur des ballons	13
5 Découpage de gâteaux ronds à la règle et au compas	14
6 Dimension fractale de la côte bretonne	15
7 Le ruban de Möbius : découpage, collage, coloriage	16
8 Découpage de parallélogramme : calcul de son aire	16
9 Le toboggan magique	17
10 Le problème de la reine Didon	18
11 Le chemin le plus court (la géodésique)	19
12 Les géodésiques chez les fourmis	19
13 Réseau le plus court	19
14 Codage en base dix ou deux	21
15 Application : le jeu de Nim (à 2 joueurs)	21
16 Le jeu de pile ou face infini : stratégie gagnante et ruine du joueur	22
17 Le jeu de la table ronde (2 joueurs)	22
18 Le jeu des bâtonnets (duel contre le maître du jeu)	22
19 Le jeu des gobelets	23
20 Le jeu auquel vous ne pouvez pas gagner	23

<b>21</b>	<b>Estimation de <math>\pi</math> par lancers successifs</b>	<b>23</b>
<b>22</b>	<b>Une courbe lumineuse apparaît dans votre tasse de café ? Il s'agit d'une caustique de cercle</b>	<b>25</b>
<b>23</b>	<b>Codage en base 2</b>	<b>28</b>
<b>24</b>	<b>Tour de cartes en base 3</b>	<b>30</b>
<b>25</b>	<b>Déterminer la couleur du haut d'une "pyramide"</b>	<b>31</b>
<b>26</b>	<b>Déterminer l'année de naissance à partir du reste du numéro de sécurité sociale</b>	<b>34</b>
<b>27</b>	<b>La cryptographie : les mathématiques du secret</b>	<b>35</b>
<b>28</b>	<b>Codes correcteurs d'erreurs et jeu de cartes (avec ou sans mensonge)</b>	<b>37</b>
<b>29</b>	<b>Pythagore et frettes sur une guitare</b>	<b>41</b>
	29.1 Octave et suite des quintes . . . . .	41
	29.2 Normaliser les fréquences . . . . .	41
	29.3 Application à la pose des frettes. . . . .	42
<b>30</b>	<b>Une course aléatoire en milieu aléatoire</b>	<b>43</b>
<b>31</b>	<b>Le modèle de Galton et Watson</b>	<b>44</b>
<b>32</b>	<b>Serrons-nous la main</b>	<b>45</b>
<b>33</b>	<b>Problème des ponts de Königsberg</b>	<b>45</b>
<b>34</b>	<b>Instant insanity</b>	<b>46</b>
<b>35</b>	<b>Polyèdres platoniciens</b>	<b>47</b>
<b>II</b>	<b>Solutions et explications</b>	<b>49</b>

# Première partie

## Animations

Ce livret contient des activités apportées, construites ou enrichies par des membres permanents (enseignant·es, enseignant·es, enseignant·es-chercheur·euses) de ces unités, mais aussi par un·e enseignant·e de l'IUT de Brest, par des doctorant·es et post-doctorant·es en mathématiques à l'UBO, avec la participation d'étudiant·es en mathématiques de l'UBO. Quelques compléments (solutions, explications mathématiques) sont donnés dans la partie *Solutions et explications*

### 1 Tour de magie : le comptage de cubes (par le théorème des restes chinois)

**NB.** Cette activité a fait l'objet d'un article publié dans le numéro spécial "Ateliers clefs en main" de la Gazette de la SMF (volume 181, 2024) pages 37-38. <https://smf.emath.fr/publications/ateliers-clefs-en-main>.

Le "théorème chinois" dit la chose suivante :

*"Celui qui connaît les restes des divisions par 10 et par 11 connaît le reste de la division par  $10 \times 11 = 110$ "*

**Tour 1** *Préparez un sac de cubes contenant 109 cubes (ou moins). Demandez à quelqu'un de :*

- *prendre autant de cubes qu'il le souhaite du sac ; appelons  $N$  ce nombre de cubes (qui est inconnu)*
- *empiler les cubes qu'il a choisi par paquets de 10 cubes et de vous dire combien il en reste (appelons  $R(10)$  ce nombre)*
- *les empiler à nouveau par tas de 11 cubes et vous dire combien il en reste (appelons  $R(11)$  ce nombre).*

*La personne doit faire cela sans que vous voyez les cubes (vous pouvez par exemple tourner le dos, ou bien avoir placé un cache).*

*Avec les seules informations qu'il vous a données vous êtes en mesure de déterminer le nombre  $N$  de cubes pris par cette personne.*

Le nombre  $N$  de cubes est :  $11 \times R(10) - 10 \times R(11)$  auquel on ajoute éventuellement 110 (si le nombre obtenu est négatif) de sorte à avoir un résultat compris entre 0 et 109.

**Exemple 1** — *Si le reste par 10 est 4 et si le reste par 11 est 3, on calcule  $4 \times 11 - 3 \times 10 = 44 - 30 = 14$  et donc :  $N = 14$ .*

- Si le reste par 10 est 3 et si le reste par 11 est 4, on calcule  $3 \times 11 - 4 \times 10 = 33 - 40 = -7$  et donc :  $N = -7 + 110 = 103$ .

**Astuce** : si les restes par 10 et par 11 sont égaux, alors le nombre  $N$  recherché est égal à ces restes.

L'idée est que  $11 - 10 = 1$ . Cela marche avec n'importe quel couple de nombres consécutifs (par exemple 100 et 101) et plus généralement cela s'adapte aussi à n'importe quel couple de nombres premiers entre eux grâce au théorème de Bezout (voir la partie *Solutions et explications* pour les explications mathématiques).

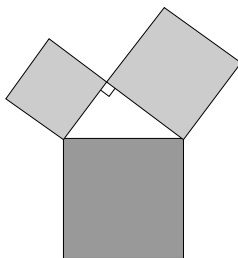
Cette méthode (appelée *Théorème des restes chinois*) apparaissait dans le livre de Sun Zi (le Sunzi suanjing, 3ème siècle) dans un exercice portant sur le comptage de soldats chinois.

## 2 Le théorème de Pythagore en puzzle

**NB.** Cette activité a fait l'objet d'un article supplémentaire attaché au numéro spécial "Ateliers clefs en main" de la Gazette de la SMF (volume 181) <https://smf.emath.fr/publications/ateliers-clefs-en-main>; le matériel est aussi disponible sur le site Kits Mathématiques du CNRS à l'adresse : <https://kits.math.cnrs.fr/node/71>.

Vous connaissez sans doute du célèbre quatrain de Franc Nohain qui énonce ainsi le théorème de Pythagore valable pour tout triangle rectangle :

Le carré de l'hypothénuse<sup>1</sup>  
Est égal, si je ne m'abuse  
À la somme des carrés  
Construits sur les deux autres côtés

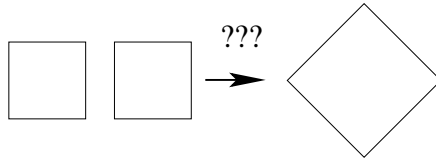


C'est-à-dire que l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux petits carrés.<sup>2</sup>

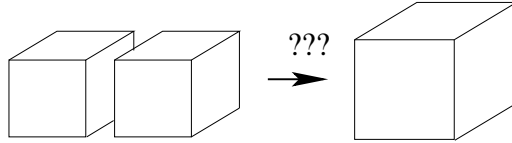
**Question (Duplication du carré)** : Pouvez-vous construire un carré d'aire  $2m^2$  à partir de deux carrés d'aire  $1m^2$  ? (vous avez le droit de découper les carrés)

1. Dans un triangle rectangle, l'hypothénuse est le côté le plus grand (celui qui ne touche pas l'angle droit)

2. En effet, l'aire d'un carré de côté de longueur  $a$  est  $a \times a$  qu'on note  $a^2$  et qu'on appelle le carré de  $a$ .

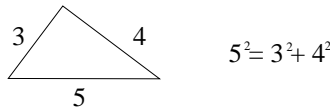


Question (Duplication du cube) : Pouvez-vous de même construire un cube de  $2m^3$  à partir de deux cubes de volume  $1m^3$  ?



Le problème de la duplication du cube est (avec la quadrature du cercle et la trisection de l'angle) l'un des **trois grands problèmes mathématiques de l'antiquité**. Selon la mythologie grecque, l'oracle de Delphes déclara qu'il fallait doubler le volume de l'autel d'Apollon afin de faire cesser une épidémie de peste. L'autel d'Apollon avait la forme d'un cube parfait. Doubler la longueur ne résoud pas le problème (cela multiplie par 8 le volume). Les architectes allèrent consulter Platon qui leur répondit qu'Apollon n'avait pas besoin d'un autel double mais leur reprochait, par l'intermédiaire de l'oracle, de négliger la géométrie.

La réciproque du théorème de Pythagore dit qu'un triangle dont les longueurs de côtés  $a, b, c$  vérifient  $a^2 + b^2 = c^2$  est rectangle. Le triangle rectangle le plus connu est celui dont les côtés mesurent 3, 4 et 5 dans l'unité de votre choix (centimètres, dizaines de centimètres). Le théorème de Pythagore, et en particulier le triangle rectangle 3, 4, 5, étaient connus bien avant Pythagore. Ce triangle est utilisé depuis des millénaires par les bâtisseurs pour construire des angles droits (et donc des murs bien verticaux).



### Un Puzzle de Pythagore

Démontrez le théorème de Pythagore avec le puzzle en haut de la page suivante : découpez les petits carrés comme indiqué et reconstituez le grand carré avec tous les morceaux que vous avez découpés. (solution dans la partie *Solutions et explications*)

### Un second puzzle de Pythagore (en négatif)

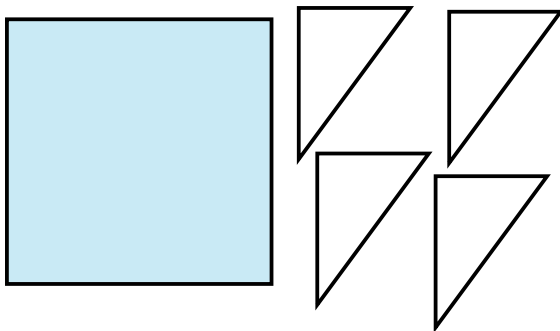
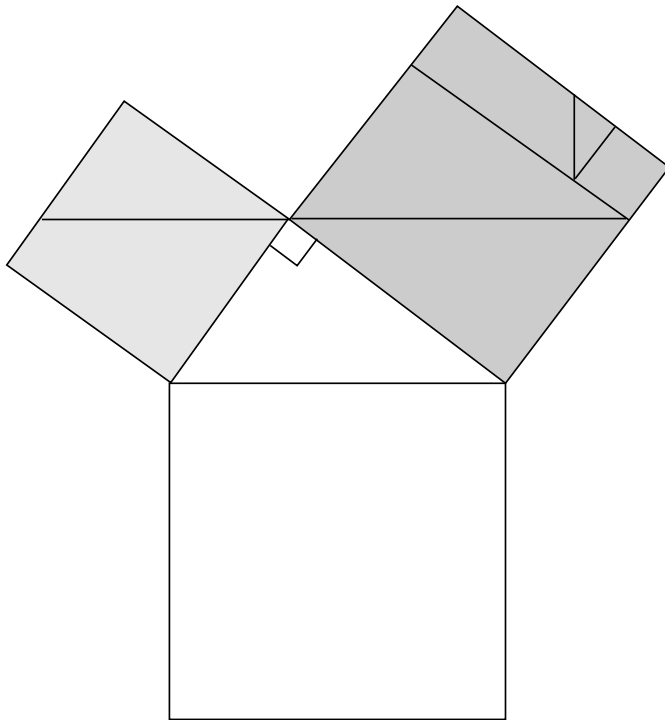
On dispose d'un grand carré bleu de côté  $a + b$  et de 4 triangles rectangles

blancs de côtés  $a, b, c$  d'hypothénuse  $c$  (modèles à découper en bas de la page suivante). Vous allez prouver le théorème de Pythagore en utilisant les triangles rectangles pour cacher des parties du grand carré bleu.

— D'abord placez les 4 triangles rectangles sur le carré bleu de manière à faire apparaître en bleu un carré de côté  $a$  et un carré de côté  $b$  (dans l'espace non occupé par les triangles rectangles).

— Puis placez les 4 triangles rectangles sur le grand carré bleu de manière à faire apparaître en bleu (dans l'espace non occupé par les triangles rectangles) un carré de côté l'hypothénuse  $c$ .

(solution dans la partie *Solutions et explications*)

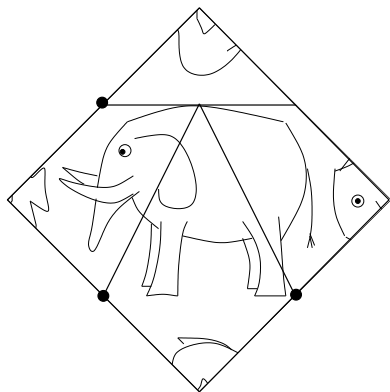




### 3 Découpage et pavage : Carréléphant et Poissoncèle

Découpez les quatre pièces d'un carréléphant (éléphant dans un carré). et retrouver le "poissoncèle" (poisson dans un triangle isocèle).

Henry Ernest Dudeney, un inventeur de casse-têtes, mit au point ce découpage et en fabriqua une maquette en bois (articulée aux endroits indiqués par un point) qu'il fut invité à présenter à la Royal Society en 1905. Le "poisoncèle" ou le "carréléphant" fournissent un exemple de pavage du plan que vous pouvez voir apparaître en manipulant les 4 carréléphants ci-dessous (voir aussi la partie *Solutions et explications*).



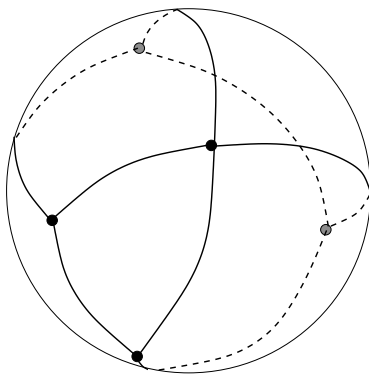


## 4 L'identité d'Euler sur des ballons

Dessinez des points sur un ballon de baudruche classique, reliez ces points par des traits (de sorte que de chaque point, il parte au moins un trait et de sorte qu'un trait relie toujours deux points).

Notons  $S$  le nombre de points (appelés sommets),  $A$  le nombre de traits (appelés arêtes),  $F$  le nombre de faces, on a toujours la relation suivante :

$$F - A + S = 2.$$

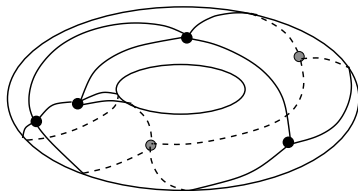


Sur l'exemple dessiné, on a bien :  $5 - 8 + 5 = 2$ . Vous pouvez vérifier la formule sur un ballon de football, de volley, de basket ou de rugby.

Il existe une formule analogue pour les ballons de baudruche en forme de bouée (ou de chambre à air) :

$$F - A + S = 0.$$

Pour une bouée, il convient de préciser ce qu'on entend par face. On entend par face une zone qui une fois découpée ne contiendra pas de trou.



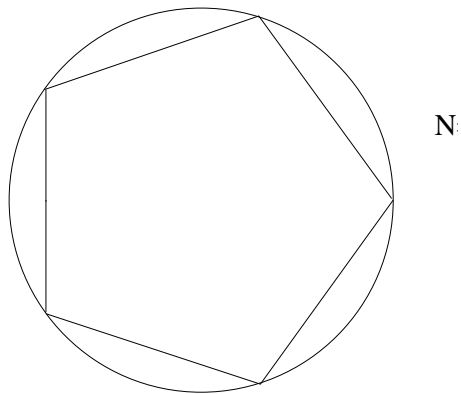
Sur l'exemple, on a bien :  $5 - 11 + 6 = 0$ .

La formule d'Euler servira plus loin pour montrer qu'il n'existe que 5 polyèdres convexes réguliers (voir *polyèdres platoniciens*).

## 5 Découpage de gâteaux ronds à la règle et au compas

Comment découper sans faire de jaloux un gâteau rond en un certain de nombre parts (disons  $N$  parts)? Ce problème revient à dessiner un polygone régulier à  $N$  côtés.

Comment faire ce dessin quand on ne dispose que d'un crayon, d'une règle non graduée et d'un compas? (voir *Solutions et explications*)



Règles du jeu : vous avez le droit de choisir deux ou trois points sur le cercle pour commencer et de construire :

- les droites passant par deux points déjà construits,
- les cercles de centre un point déjà construit et de rayon la distance entre deux points déjà construits
- les points d'intersection de deux cercles, de deux droites ou d'un cercle et d'une droite (déjà construits)

En 1796, à l'âge de 19 ans, le mathématicien Karl Friedrich Gauss a montré que ce n'est possible que pour :

- (i)  $N = 1$  ;
- (ii) Les puissances de 2 :  $2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64$ , etc. ;
- (iii) les nombres premiers  $N$  de la forme :  $N = 2^{2^n} + 1$  (par exemple : 3, 5, 17, 257, 65537 (on ne connaît pas d'autres tels nombres premiers!!!) ;
- (iv) Tout produit de nombres distincts de l'une des formes précédentes.

Ainsi, cette construction est possible pour les valeurs de  $N$  suivantes : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17 et impossible pour : 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19

Mais, pour  $N=9$ , nous pouvons néanmoins proposer un découpage original à la règle et au compas...

## 6 Dimension fractale de la côte bretonne

Matériel : une carte représentant la partie de la côte bretonne que vous avez choisi d'étudier, des figurines ayant différents écarts entre les pieds (respectivement : 10 cms, 5 cms, 2,5 cms, 1,25 cms) ou bien un double décimètre.

Activité : On choisit un point de départ et un point d'arrivée sur la carte (par exemple Carantec et le Conquet) et on mesure la distance entre ces points avec les 4 figurines en comptant le plus petit nombre de pas que chaque figurine peut faire.

Règle pour faire un pas : Si on est à un point  $A$  de la côte, on peut faire un pas de longueur  $L$  jusqu'au point  $B$  si toute la partie de la côte entre  $A$  et  $B$  est à une distance inférieure à  $L$  du point  $A$  (c'est-à-dire si le disque de centre  $A$  et de rayon  $L$  contient la côte comprise entre  $A$  et  $B$  : cela se voit en mettant un pied de la figurine en  $A$  et en faisant tourner la figurine, comme on le ferait avec un compas).

Observation : Les distances mesurées sont différentes selon la figurine utilisée. On constate que plus la figurine est petite, plus la distance parcourue est grande.

Explication : une petite figurine doit faire le tour de zones (pointes, caps, embouchures de rivières) qui sont facilement enjambées par les figurines plus grandes.

Cette activité est liée à la notion de dimension fractale.

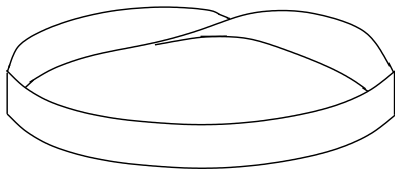
Un nombre réel  $d$  est la dimension fractale (de Minkowski-Bouligand) d'un ensemble si le nombre minimal  $N_r$  de disques de rayon  $r > 0$  permettant de recouvrir l'ensemble se comporte approximativement en  $1/r^d$  quand  $r$  s'approche de 0. Cela signifie que  $N_{r/2} \approx 2^d N_r$ .

Pour un segment,  $N_{r/2} \approx 2N_r$  : il faut à peu près deux fois plus de disques de rayon  $r/2$  que de disques de rayon  $r$  pour recouvrir ce segment. La dimension d'un segment est 1.

Suite de l'activité : Utilisez les mesures effectuées dans cette activité pour estimer la dimension fractale de la côte bretonne.

## 7 Le ruban de Möbius : découpage, collage, coloriage

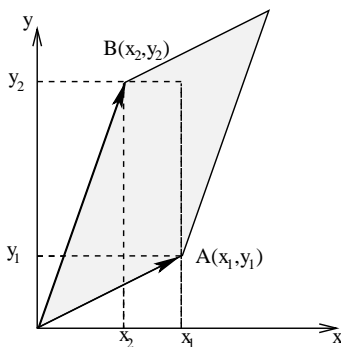
Prenez un ruban ou bien une bande de papier assez longue et fine, tournez le d'un demi-tour puis collez les deux bouts, vous avez fabriqué un ruban de Möbius.



Découvrez les propriétés amusantes de cet objet célèbre de la topologie algébrique : déterminez le nombre de faces du ruban de Möbius en le coloriant, que se passe-t-il si on le découpe en deux ou trois dans le sens de la longueur ???

## 8 Découpage de parallélogramme : calcul de son aire

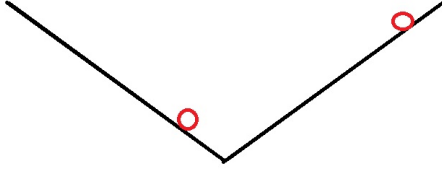
Comment découper ce parallélogramme de façon à montrer que son aire vaut :  $(x_1 \times y_2) - (x_2 \times y_1)$ ? (voir la partie *Solutions et explications*)



*En savoir plus* : L'aire est le déterminant de la matrice constituée des vecteurs de base du parallélogramme.

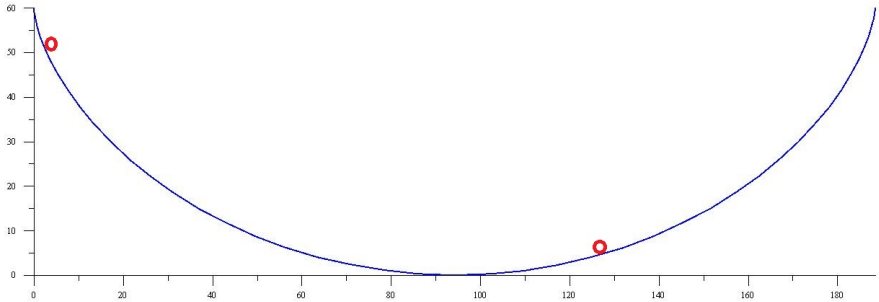
## 9 Le toboggan magique

On pose au même moment deux billes sur deux toboggans plats identiques (même pente). Quelle bille arrivera la première en bas ?



Sur un toboggan plat, pas de surprise, ce sera toujours la bille la plus basse qui arrivera la première en bas, simplement parce que, tant que les 2 billes descendent sur le toboggan, elles sont accélérées de la même manière et leurs vitesses sont donc égales à chaque instant.

On pose en même temps une bille à gauche et une bille à droite de notre double toboggan magique (voir figure ci-dessous). Laquelle arrivera la première en bas ?



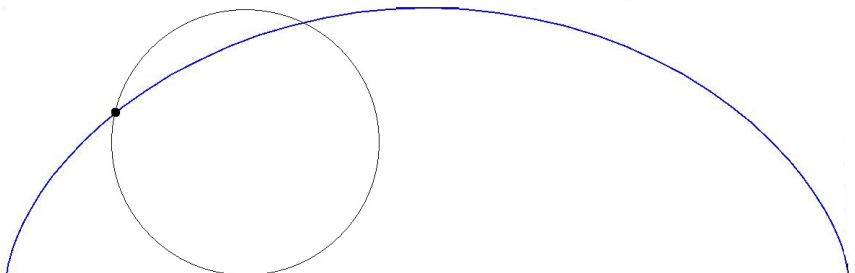
La réponse est surprenante : elles arriveront en même temps en bas, et ceci quels que soient les endroits où on les a posées sur le toboggan!!!<sup>3</sup>

On dit que la courbe de ce toboggan est *tautochrone* ou *isochrone*. Christiaan Huygens a montré au 17<sup>ème</sup> siècle (dans son *Horologium Oscillatorium* que la cycloïde est tautochrone. C'est cette courbe bien connue et facile à construire que nous avons utilisée pour construire notre toboggan magique.

La cycloïde est la trajectoire d'un point fixé à la surface d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite (voir dessin ci-après). On obtient le double toboggan magique en évitant la partie située en-dessous de la cycloïde sur le dessin ci-dessous.

---

3. nous négligeons les forces de frottement.



Notre toboggan magique a été construit par le menuisier de l'UBO avec un cercle de rayon  $R = 0,30$  mètre (30 cm), le temps mis par une bille pour arriver en bas est  $\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \sim 0,55$  seconde (en notant  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  la constante gravitationnelle).

## 10 Le problème de la reine Didon (ou le problème isopérimétrique)

On raconte que la reine Didon, lorsqu'elle fonda Carthage, devait délimiter la ville à l'aide de peaux de bœufs. Comme elle était très intelligente, elle commença par découper la peau en fines lanières qui mises bout à bout lui permirent de fabriquer une longue corde dont elle noua les extrémités ensemble. Le problème qui se posa alors à elle fut le suivant : quelle forme donner à la corde afin d'entourer la plus grande superficie possible ?

On suppose que la corde est posée sur une zone plate.

Pour résoudre ce problème on va utiliser une "preuve" géométrique. On considère le demi-problème de la reine Didon, comme si on avait coupé en 2 la corde de la reine Didon : comment délimiter la zone d'aire maximale à l'aide d'une corde et d'un mur (ou d'un miroir si on veut mieux visualiser).

Vous n'aurez alors qu'à prendre la forme obtenue et son symétrique (apparaissant dans le miroir) et vous aurez résolu le problème.

Essayez de faire cela avec une corde.

Une fois cela fait, on verra ensemble si on peut faire mieux et on résoudra le problème de la reine Didon (voir la partie *Solutions et explications* pour la suite de l'activité et les explications mathématiques).

On peut aussi se demander comment envelopper le plus grand volume possible à l'aide d'une surface donnée. Les bulles de savon nous apportent la solution!!!

## 11 Le chemin le plus court (ou la quête de la géodésique)

Le chemin le plus court pour traverser la place de la Liberté? Facile. Tout le monde sait que le plus court chemin est la ligne droite.

Le chemin le plus court de Brest à San Francisco? Pareil, facile, il suffit de regarder une carte.

Mais il paraît que la terre n'est pas plate.....

(voir explications dans la partie *Solutions et explications*).

## 12 Sur la détermination des géodésiques chez les fourmis

Imaginons une colonie de fourmis, sa fourmilière et de la nourriture localisée à proximité.

Pour simplifier et pour fixer les idées, supposons qu'il n'y ait que trois chemins possibles de la fourmilière jusqu'à la nourriture et que ces trois chemins soient de longueurs différentes.

Les lecteurs de Bernard Werber savent bien que, lorsqu'elles se déplacent, les fourmis déposent sur leur trajet des phéromones, molécules-balises reconnaissables par leurs congénères.

On suppose que les fourmis empruntent le même chemin au retour qu'à l'aller.

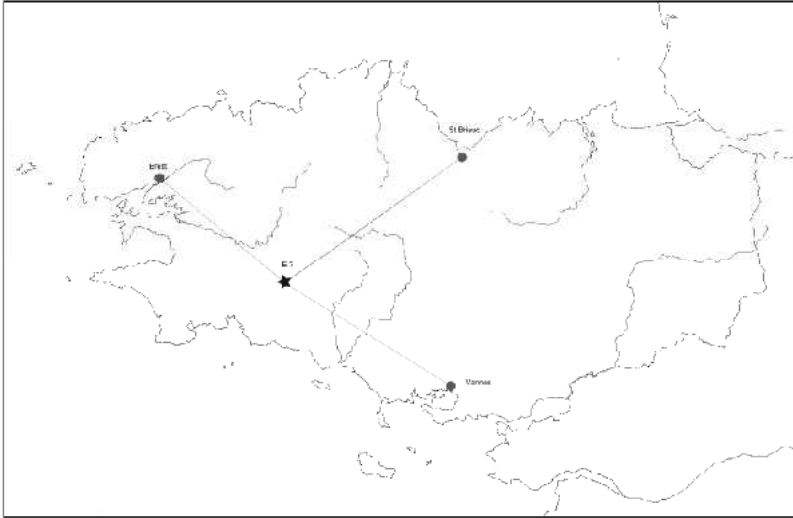
Pouvez-vous expliquer, avec ces seules données que, au bout d'un certain temps, elles n'emprunteront pratiquement plus que le chemin le plus court? (voir la partie *Solutions et explications* pour les explications mathématiques)

## 13 Réseau le plus court

Un ingénieur de Ponts et Chaussées veut proposer un projet de voie express entre les métropoles bretonnes : Brest, Saint Briec et Vannes. Il veut construire le réseau de route le plus court reliant ces trois villes.

Il veut relier ces villes via un seul Echangeur E.

Où doit-il placer cet échangeur pour minimiser la somme des distances (et le macadam utilisé)?



Autre question : Quel est le réseau le plus court reliant les quatre sommets d'un carré (on peut utiliser plusieurs échangeurs) ?  
(voir la partie *Solutions et explications* pour les explications mathématiques)

## 14 Codage en base dix ou deux

### Écriture en base décimale

L'écriture des nombres en base décimale nous est tellement familière que nous devons faire un effort pour distinguer un nombre de son écriture en base décimale. Intéressons nous par exemple au nombre  $A$  de jours du mois d'Octobre. En base décimale, ce nombre s'écrit : 31, ce qui signifie :  $3 \times 10 + 1$ . Le nombre  $B$  de jours d'une année bissextile s'écrit :  $365 = 3 \times 10^2 + 6 \times 10 + 5$ .

Comment obtient-on cette écriture ?

5 est le reste  $R$  de la division euclidienne de  $B$  par dix.

Le nombre  $B - R$  est divisible par dix.

6 est le reste  $R'$  de la division euclidienne de  $B' = (B - R)/dix$  par dix.

3 est le reste  $R''$  de la division euclidienne de  $B'' = (B' - R')/dix$  par dix.

On s'arrête là car  $B'' - R'' = 0$ .

### Écriture en base binaire

C'est essentiellement le langage des ordinateurs.

L'écriture d'un chiffre en base binaire est basée sur le même principe en prenant deux au lieu de dix. Ainsi, une écriture en base binaire n'utilise que deux symboles : 0 et 1.

Quelques exemples :

— zéro s'écrit :  $0 = 0 \times 1$  ; un s'écrit :  $1 = 1 \times 1$  ;

— deux s'écrit :  $10 = 1 \times 2 + 0 \times 1$  ; trois s'écrit :  $11 = 1 \times 2 + 1 \times 1$  ;

— quatre s'écrit :  $100 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0 \times 1$  ; cinq s'écrit :

$101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 1$  ; six s'écrit :  $110 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0 \times 1$  ;

sept s'écrit :  $111 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 1$  ; etc...

Comment obtient-on cette écriture ?

Expliquons cela pour  $C = cinq$ .

1 correspond au reste  $R$  de la division euclidienne de  $C$  par deux.

Le nombre  $C - R$  (=quatre) est divisible par deux.

0 correspond au reste  $R'$  de la division euclidienne de  $C' = (C - R)/deux$  (=deux) par deux.

1 correspond au reste  $R''$  de la division euclidienne de  $C'' = (C' - R')/deux$  (=un). On s'arrête là car  $C'' - R'' = 0$ .

## 15 Application : le jeu de Nim (à 2 joueurs)

On dispose plusieurs pièces en différents tas. La règle est la suivante : chacun son tour, un joueur enlève une ou plusieurs pièces d'un seul tas ; celui qui enlève la dernière pièce a gagné. Si vous maîtrisez le codage en base deux, il sera difficile de vous battre à ce jeu-là.

## 16 Le jeu de pile ou face infini : stratégie gagnante et ruine du joueur

On vous propose de jouer à pile ou face selon les règles suivantes : les deux joueurs misent la même valeur ; c'est vous qui décidez de la mise à chaque coup et c'est vous qui décidez du moment où vous vous arrêtez de jouer. Il existe une stratégie vous permettant de gagner (un jour) la somme que vous avez mise au départ. Pouvez-vous trouver laquelle ?

On peut en théorie adapter cette stratégie à tout jeu où les règles sont comme ci-dessus mais il est fortement déconseillé de la mettre en pratique dans un jeu où vous avez peu de chance de gagner car, alors, pour gagner ne serait-ce qu'un euro, vous risquez d'être amené à miser des sommes exorbitantes et devrez être vraiment très patient (voir la partie *Solutions et explications* pour la solution et les explications mathématiques).

## 17 Le jeu de la table ronde (2 joueurs)

La règle est la suivante : les deux joueurs posent à tour de rôle des jetons ronds identiques sur une table ronde. Le premier qui ne peut plus poser de pièce a perdu. Il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur.

Voyez-vous laquelle ? (indice : c'est géométrique).

(voir la partie *Solutions et explications* pour une stratégie gagnante et les explications mathématiques)

## 18 Le jeu des bâtonnets (duel contre le maître du jeu)

**NB.** Cette activité a fait l'objet d'un article publié dans le numéro spécial "Ateliers clefs en main" de la Gazette de la SMF (volume 181, 2024), pages 75-79. <https://smf.emath.fr/publications/ateliers-clefs-en-main>.

On place  $N \geq 3$  bâtonnets sur une table. Chacun des deux joueurs (le maître du jeu et le candidat) enlève à tour de rôle 1, 2 ou 3 bâtonnets. Celui qui prend le dernier a perdu.

- Pour quelles valeurs de  $N$  existe-t-il une stratégie gagnante pour le premier joueur (considérez de petites valeurs de  $N$  ou prenez le jeu à l'envers) ?
- Sachant que dans le vrai jeu,  $N = 21$  et c'est toujours le candidat qui commence, le duel peut-il être juste ? L'est-il toujours ?
- Généralisez au cas où chaque joueur doit enlever entre 1 et  $k$  bâtonnets pour un  $k$  quelconque fixé et évidemment  $k < N$ .
- Et si maintenant le gagnant est celui qui prend le dernier bâtonnet ?

(voir la partie *Solutions et explications* pour les réponses et les explications mathématiques)

## 19 Le jeu des gobelets

Dans ce jeu on place 3 gobelets à l'envers sur une table. Sous l'un des trois, un trésor est caché. Si le candidat trouve le gobelet qui dissimule la clef il gagne le trésor !

Le candidat commence par choisir un des trois gobelets. Avant de vérifier si c'est le bon, le maître du jeu retourne un gobelet vide et demande au candidat s'il est sûr de son premier choix ou s'il préfère changer ?

Qu'en pensez vous ? Est-il préférable de changer au risque de perdre le trésor si on avait fait le bon choix au premier coup ?

NB : On peut y jouer aussi avec des bonbons!!!!

(voir la partie *Solutions et explications* pour les explications mathématiques)

## 20 Vous ne pouvez pas gagner à ce jeu là (un problème de logique)

La règle est la suivante : nous griffonnons une phrase sur un papier, vous ne voyez pas ce qui est écrit et on vous demande de parier si ce qui est écrit sur le papier est vrai ou faux. Nous parions le contraire et nous gagnons à chaque fois. Quelle est cette phrase ?

(voir la partie *Solutions et explications* pour la solution)

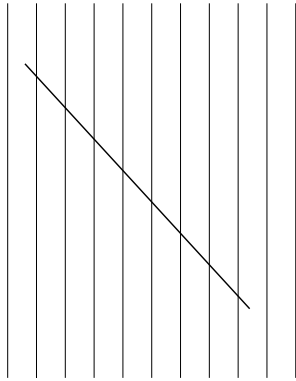
## 21 Estimation de $\pi$ par lancers successifs

### Aiguille de Buffon

On dessine des traits parallèles distants de 0,5 cm sur une feuille.

On lance de nombreuses fois une aiguille de longueur  $\ell$  cm (la longueur de l'aiguille est connue). À chaque lancer, on compte le nombre de fois où l'aiguille rencontre une ligne. On fait la moyenne.

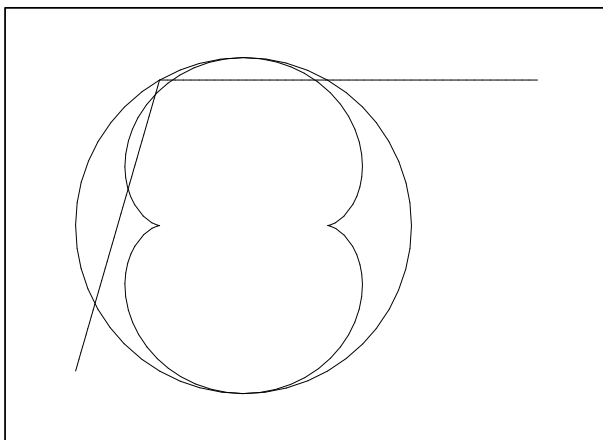
Lorsque le nombre de lancers est suffisamment grand, la moyenne est proche de  $\pi\ell$ .



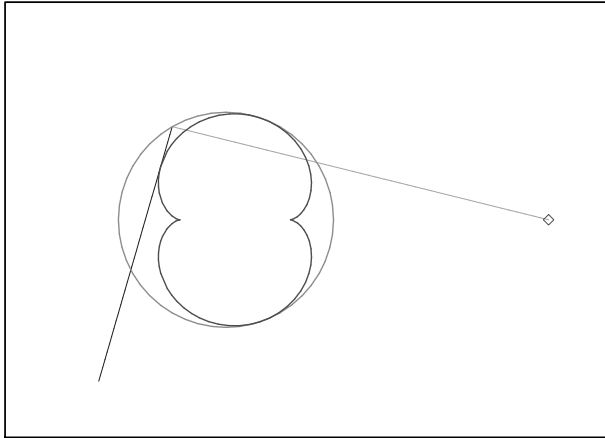
## 22 Une courbe lumineuse apparaît dans votre tasse de café ? Il s'agit d'une caustique de cercle

Une caustique ( $\kappa\alpha\upsilon\sigma\tau\iota\kappa\omicron\varsigma$  : "qui brûle" en grec ancien ou moderne) est l'enveloppe des rayons lumineux issus d'un point  $p$  à distance finie ou infinie après modification par un instrument optique. Le physicien allemand von Tschirnhaus étudia le premier les caustiques à la fin du XVIIème siècle. On regarde ici les caustiques par réflexion sur un cercle. On observe ceci quotidiennement dans sa tasse de café (le cas  $p$  à distance finie s'observe par exemple avec une lumière issue d'une lampe dans la pièce où vous vous trouvez, le cas  $p$  à distance infinie s'observe quand vous regardez la réflexion des rayons du soleil sur votre tasse). La nature de la caustique ne dépend pas du fait que  $p$  soit à distance finie ou non mais du fait que  $p$  soit sur le cercle ou non...

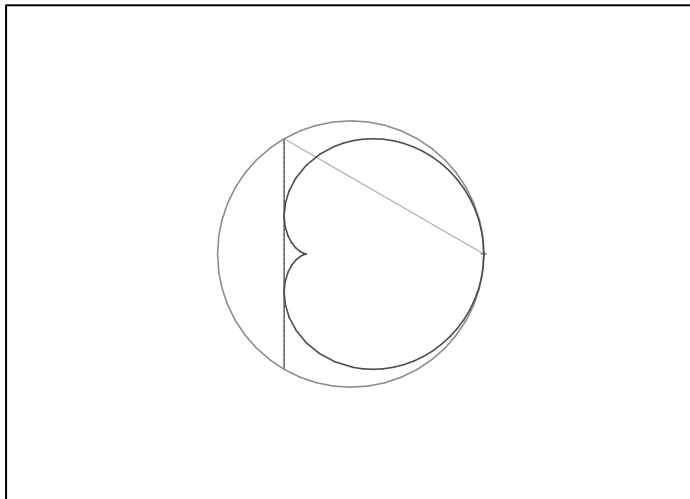
A.  $p$  à l'infini :



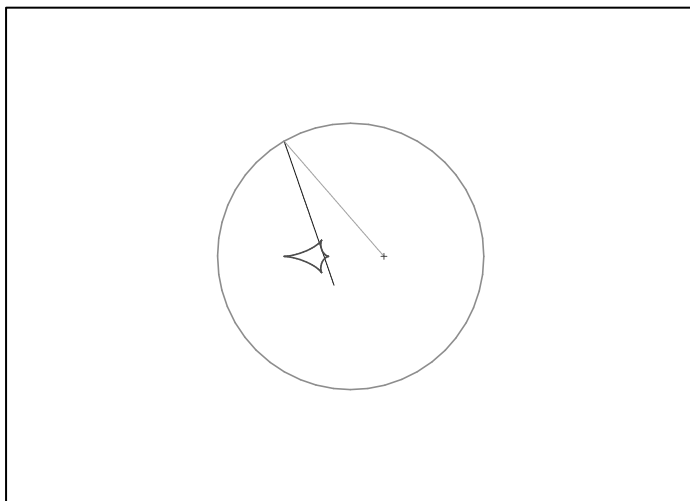
B.  $p$  à distance finie à l'extérieur du cercle :



C.  $p$  sur le bord du cercle :



D.  $p$  à l'intérieur du cercle :



Vous trouverez quelques explications mathématiques sur les caustiques dans la partie *Solutions et explications* à la fin du livret.

## 23 Codage en base 2

Description du tour Demandez à une personne dans l'assistance de choisir mentalement un nombre (entier) compris entre 0 et 63.

Pour chaque carte ci-dessous, demandez lui si le nombre choisi est ou non écrit sur cette carte :

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

Le nombre choisi est égal à la somme des nombres inscrits en premier sur les cartes auxquelles la personne a dit oui.

Par exemple, si la personne dit : OUI, NON, NON, OUI, NON, OUI, le nombre cherché est :  $32+4+1=37$ .

Ce tour est basé sur le code en base 2 : tout nombre compris entre 0 et 63 s'écrit (de manière unique) sous la forme :

$$a + 2 \times b + 4 \times c + 8 \times d + 16 \times e + 32 \times f,$$

avec  $a, b, c, d, e$  et  $f$  égaux à 0 ou 1.

La première carte contient les nombres tels que  $f = 1$ , la seconde ceux tels que  $e = 1$ , la troisième ceux tels que  $d = 1$ , la quatrième ceux tels que  $c = 1$ , la cinquième ceux tels que  $b = 1$  et la dernière ceux tels que  $a = 1$  (c'est-à-dire les nombres impairs).

## 24 Tour de cartes en base 3

### Description du tour

— **Étape 1.**

27 cartes sont disposées en 3 colonnes "verticales" de 9 cartes. Vous demandez à une personne dans l'assistance de choisir mentalement une carte sans vous l'indiquer. Vous lui demandez de bien la mémoriser et de vous indiquer dans quelle colonne elle se situe.

Vous ramassez les cartes colonne par colonne, vous en faites un seul paquet (en plaçant discrètement la colonne indiquée au milieu du paquet).

— **Étape 2.** Vous placez à nouveau les cartes sur la table en trois paquets "verticaux" (vous commencez par le haut, vous posez les 3 premières cartes de gauche à droite, puis vous passez à la ligne suivante, etc.). Vous demandez à la personne de vous indiquer dans quelle colonne se situe la carte qu'elle a choisie.

Vous ramassez les cartes comme précédemment.

— **Étape 3.** Identique à l'étape 2.

Conclusion du tour La carte choisie est en position 14 (au milieu de votre paquet).

Maintenant que vous avez cette information, à vous d'user de subterfuges pour la faire apparaître comme par magie...

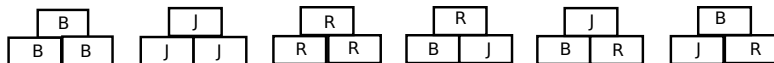
Généralisation Plus généralement, vous pouvez choisir la position à laquelle la se trouvera la carte dans votre paquet à la fin du tour (ce peut être le jour de naissance de quelqu'un dans l'assemblée, son mois de naissance, le nombre de lettre dans son prénom ou un nombre choisi par la personne au début du tour).

On dit qu'une colonne est en position 0 si elle a été mise au-dessus du paquet ; en position 1 si elle a été mise au milieu du paquet et en position 2 si elle a été mise en-dessous du paquet.

Si la colonne la contenant est placée dans le paquet en position  $a$  à l'étape 1, en position  $b$  à l'étape 2 et en position  $c$  à l'étape 3, la carte apparaîtra en position numéro :  $1 + a + 3 \times b + 9 \times c$ .

## 25 Déterminer la couleur du haut d'une "pyramide"

On empile des pavés de trois couleurs (bleu=B, rouge=R, jaune=J) en respectant les règles de construction suivantes :



- si les deux pavés du bas sont de la même couleur, alors le pavé posé au-dessus sera également de cette couleur (par exemple, si les deux pavés du bas sont jaunes, alors le pavé posé au-dessus sera aussi jaune),
- si les deux pavés du bas sont de couleurs différentes, alors le pavé posé au-dessus sera de la troisième couleur (par exemple, si les deux pavés du bas sont jaune et rouge, alors le pavé posé au-dessus sera bleu).

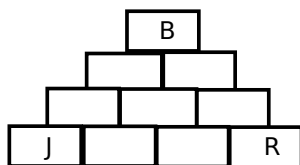
On peut réaliser ainsi, selon le nombre de pavés à disposition, des "pyramides" de hauteurs variées.

L'activité consiste à deviner très vite la couleur du haut de la pyramide à partir des couleurs de la base.

Quelle que soit la hauteur de la construction, la couleur du haut de la pyramide est totalement déterminée par les couleurs des pavés du bas, mais la formule peut être plus ou moins simple (voir la partie *Solutions et explications* pour plus d'explications mathématiques sur ce qui suit).

### Pyramide de base 4

On demande à des personnes de choisir 4 pavés, de les mettre les uns à côté des autres, puis de réaliser une construction à partir de ces 4 pavés et on devinera la couleur du haut avant que tout soit construit.



Pour une base de 4 (et plus généralement pour des nombres de la forme  $3^k + 1$  comme aussi 10 et 28), la couleur du haut de la tour s'obtient en regardant les deux couleurs aux extrémités de la base et en appliquant la

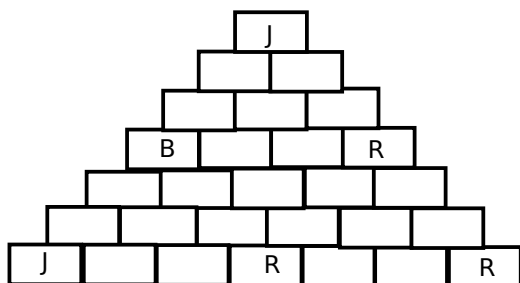
règle vu ci-dessus (même couleur si même couleur, troisième couleur si couleurs différentes), comme sur l'exemple ci-dessus.

C'est-à-dire que la couleur en haut d'une pyramide de base 4 se calcule comme celle d'une pyramide de base 2 en regardant les extrémités de la base de la pyramide de 4.

## Pyramide de base 7

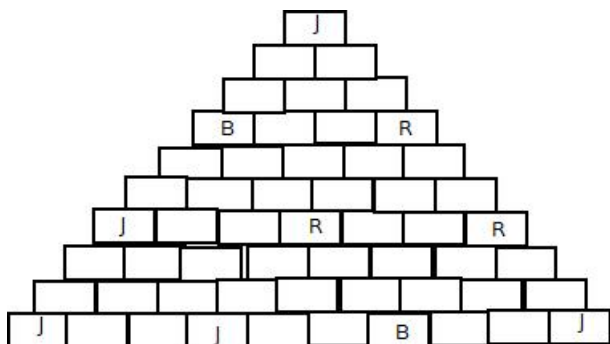
On peut déterminer la couleur du haut d'une pyramide de base 7 en utilisant les pyramides de base 4 qu'elle contient.

On utilise les couleurs des deux extrémités de la base et la couleur du milieu de la base de la pyramide pour calculer les couleurs des extrémités de l'étage du milieu de la pyramide, puis on calcule la couleur du haut de la pyramide, comme indiqué sur l'exemple ci-dessous :



Une pyramide de base 7 se calcule donc en la voyant comme une pyramide de base 4 posée sur 2 pyramides de base 4 ayant une extrémité commune, c'est-à-dire que ces 2 pyramides reposent sur 3 pavés. Les calculs se font donc comme pour une pyramide de base 3, en considérant les extrémités des pyramides de 4.

## Pyramide de base 10



Un pyramide de base 10, quant à elle, peut se voir comme une pyramide de base 4 posée sur 2 pyramides de base 4, elles-mêmes posées sur 3 pyramides de base 4 et chacune de ces 3 pyramides a une extrémité commune avec sa ou ses voisines, c'est-à-dire que ces 3 pyramides reposent sur 4 pavés. Les calculs se font donc comme pour une pyramide de base 4, en considérant les extrémités des pyramides de 4.

Et donc, le sommet de la pyramide s'obtient comme pour une pyramide de 4, ou une pyramide de 2, en regardant seulement les couleurs des deux extrémités de la base.

Dans l'exemple ci-dessus, les deux extrémités sont toutes deux jaunes ce qui détermine que le haut de la pyramide est jaune. Les autres couleurs indiquées sur le dessin sont juste indiquées pour aider à visualiser comment une pyramide de 10 peut être vue comme une pyramide de 4 en "dézoomant".

## 26 Déterminer l'année de naissance à partir du reste du numéro de sécurité sociale

Le code de sécurité sociale est composé de 13+2 chiffres, les 13 premiers contiennent des informations personnelles et les 2 derniers permettent de vérifier que les valeurs données sont correctes. Ces deux chiffres permettent de détecter une erreur.

Le code de sécurité sociale à la structure suivante :

$$a \ bc \ de \ fg \ hij \ klm \ no$$

où

- $a$  est un chiffre codant le sexe
- $bc$  sont deux chiffres codant l'année de naissance
- $de$  sont deux chiffres codant le mois de naissance
- $fg$  sont deux chiffres codant le département de naissance
- $hij$  sont trois chiffres codant la commune de naissance
- $klm$  sont trois chiffres codant le rang de naissance
- $no$  sont deux chiffres constituant la clef du code

La clef est construite de telle manière à ce que le nombre

$$abcdefghijklm + no$$

soit un multiple de 97 (plus grand nombre premier à deux chiffres). On a donc modulo 97 :

$$0 = a \times 10^{13} + bc \times 10^{11} + de \times 10^9 + fg \times 10^7 + hij \times 10^4 + klm + no$$

Ainsi, on peut déduire que les deux derniers chiffres  $bc$  de l'année de naissance vérifient :

$$bc = -2 \times no - 3 \times a + 32 \times de + 43 \times fg + 37 \times hij - 2 \times klm \text{ modulo } 97$$

(voir la partie *Solutions et explications* pour les explications mathématiques). Cela détermine l'année de naissance sauf pour les personnes nées autour de 1900 ou de 2000. En effet, cette formule ne permet pas de distinguer 97 et 00 car ces deux nombres sont égaux modulo 97. Il en va de même de 98 et 01, et de 99 et 02.

## 27 La cryptographie : les mathématiques du secret

### A. Le codage Jules César (simple décalage dans l'alphabet)

Il s'agit de remplacer chaque lettre d'un texte par la lettre située 3 places plus loin dans l'alphabet : A est remplacée par D, B par E, C par F, D par G,..., W par Z, X par A, Y par B et Z par C. Pour décoder, on remplace chaque lettre par la lettre située 3 places avant dans l'alphabet : on remplace A par X, B par Y, C par Z, D par A,..., Z par W.

Exemple : décidez EUDYRYRXVDYHCUHXVVL.

### B. La substitution

On remplace chaque lettre d'un texte par une autre ou par un autre symbole.

#### Inconvénient de ces méthodes :

Certaines lettres apparaissent plus souvent que d'autres, ce qui rend ces codes facilement cassables.

### C. Le chiffrement

Commençons par remplacer chaque lettre par un nombre à 2 chiffres :  $A = 10$ ,  $B = 11$ ,  $C = 12$ ,  $D = 13$ ,...,  $Z = 35$ , *espace* = 36. Ainsi, on remplace un texte par une succession de chiffres. Ainsi :

'CECI EST UN SECRET' = 121412183614282936302336281412271429

Coder le texte revient à transformer cette succession de chiffres en une autre.

### D. Une petite énigme

Imaginez un instant que vous viviez dans un pays où tous les facteurs sont des voleurs : le seul moyen pour qu'un colis arrive à destination est de le protéger à l'aide d'un cadenas. Le problème est que votre ami ne possède pas la clef de vos cadenas. Comment faire???? (voir la partie *Solutions et explications* pour la solution).

### E. Un double codage

Ce système de codage est inspiré de la solution de l'énigme précédente.

Vous voulez communiquer le mot "CHAT" = 12171030 à un ami. Vous choisissez chacun une clef (Vous :  $a = 1315652569$ ; votre ami :  $b = 2357831657$ ).

La communication se fait en 4 temps :

1. Vous lui transmettez le message codé avec votre clef :  
 $m_1 = 12171030 + a = 1327823599$ .
2. Il vous renvoie le nouveau message codé avec sa clef :  
 $m_2 = m_1 + b = 368565256$ .
3. Vous lui renvoyez le message décodé avec votre clef :  
 $m_3 = m_2 - a = 2370002687$ .
4. Il décode le message avec sa clef :  $m_4 = m_3 - b = 12171030$ .

Inconvénients : Une personne captant tous vos messages est en mesure de les décoder. D'où la nécessité de codages plus élaborés.

F. Un codage à clef publique : ceux qui savent coder ne savent pas décoder (codage RSA)

Considérons deux nombres premiers  $p$  et  $q$  (exemple :  $p = 13$  et  $q = 73$ ).

Notons  $n$  leur produit (exemple :  $n = 949$ ).

Choisissons deux entiers  $c$  et  $d$  tels que le produit  $c \times d$  soit égal à 1 + un multiple de  $(p - 1)(q - 1)$  (exemple :  $c = 5$  et  $d = 173$  ; on a :

$c \cdot d = 865 = 12 \times 72 + 1$ ) ; c'est-à-dire  $c \cdot d = 1 \text{ modulo } (p - 1)(q - 1)$ .

Codage d'un nombre  $m$  inférieur à  $n$  : reste de la division euclidienne de  $m^c = m \cdot \dots \cdot m$  par  $n$ . On obtient ainsi un mot  $m'$  inférieur à  $n$ .

Décodage d'un mot  $m'$  inférieur à  $n$  : reste de la division de  $(m')^d$  par  $n$ .

Clef de codage :  $(n, c)$  ; clef de décodage :  $(n, d)$ .

Exemple : on ne peut coder que des nombres inférieurs à 949 ; on découpe donc le texte en nombres de 3 chiffres (en commençant par la fin) :

121-412-183-614-282-936-302-336-281-412-271-429

et on code séparément chaque morceau ; ce qui, après calculs, nous donne : 023-250-235-490-302-715-282-591-060-250-176-884.

En pratique, l'écriture décimale des entiers  $p$  et  $q$  comporte plus de 200 chiffres.

Expérience :  $p = 5$ ,  $q = 7$  ( $n = 35$ ),  $c = d = 5$ . On code alors 2 chiffres par 2 chiffres. (Cette expérience est seulement explicative mais n'est pas pertinente car, deux chiffres représentant une lettre, cela revient à effectuer une substitution).

Codons 'CHAT' = 12171030 = 12-17-10-30 : 12  $\rightarrow$  17 ; 17  $\rightarrow$  12 ; 10  $\rightarrow$  05 ; 30  $\rightarrow$  25 ; ce qui donne : 17120525.

Quel est l'intérêt de ces codes ?

Le principe est le suivant : la clef de codage  $(n, c)$  est connue de tous, mais seul le receveur des messages connaît la clef  $(n, d)$ . (Vous pouvez imaginer les applications pour l'armée, les cartes à puces...)

Comment trouver  $d$  connaissant  $(n, c)$  ?

Il faut trouver un entier  $d$  tel que :  $c \times d = 1 \text{ modulo } (p - 1)(q - 1)$ .

Mais vous ne connaissez pas  $(p - 1)(q - 1)$  car vous ne connaissez ni  $p$  ni  $q$ , mais seulement leur produit :  $n = pq$ .

L'utilisation de ce type de codage est très répandue ; son efficacité repose sur l'idée qu'il faut beaucoup de temps pour factoriser  $n$  (c'est-à-dire pour trouver les nombres premiers  $p$  et  $q$  tels que  $n = pq$ ).

## 28 Codes correcteurs d'erreurs et jeu de cartes (avec ou sans mensonge)

				Yeux bleus
				Yeux marrons
				Yeux bleus
				Yeux marrons

Les 7 questions sont:

- 1- est-ce un chat? Réponse  $a=1$  ou  $0$
- 2- a-t-il un collier? Réponse  $b=1$  ou  $0$
- 3- a-t-il les yeux bleus? Réponse  $c=1$  ou  $0$
- 4- a-t-il une marque sur la tête? Réponse  $d=1$  ou  $0$
- 5- y a-t-il un coeur?  $e$  (correspond à  $b+c+d \equiv 1 \pmod{2}$ )
- 6- y a-t-il une balle?  $f$  (correspond à  $a+c+d \equiv 1 \pmod{2}$ )
- 7- y a-t-il une gamelle?  $g$  (correspond à  $a+b+d \equiv 1 \pmod{2}$ )

On calcule ensuite:

$$\begin{aligned}
 &a+c+e+g \\
 &b+c+f+g \\
 &d+e+f+g \\
 &\text{résultat impair} \rightarrow \text{mensonge.}
 \end{aligned}$$

Un modèle à découper est fourni à la fin du livret.

**NB.** Cette activité a fait l'objet d'un article court publié dans la Gazette de la SMF 172 et qui peut être retrouvé avec les ateliers supplémentaires en lien avec le numéro spécial "Ateliers clefs en main" de la Gazette de la SMF (volume 181, 2024) <https://smf.emath.fr/publications/ateliers-clefs-en-main>, une version longue est accessible sur Halhal-03527313, le Matériel est aussi disponible sur le site Kits Mathématiques du CNRS à l'adresse : <https://kits.math.cnrs.fr/node/34>.

Demandez à une personne de choisir une carte parmi les 16 cartes chiens/chats précédentes.

On peut coder cette carte en binaire (c'est-à-dire la représenter par une succession de 0 et de 1) avec 4 chiffres (appelés bits)  $a, b, c, d$  obtenus de la manière suivante :  $a = 1$  si la réponse à la question 1 est oui,  $a = 0$  sinon, et ainsi de suite jusqu'à la question 4.

Ainsi, si la personne répond sans mensonge à ces quatre questions, vous pouvez déterminer avec certitude la carte qu'elle a choisie.

Exemple : La deuxième carte en partant du haut à gauche est codée par 0111.

À présent, supposons que la personne ait le droit de mentir à une question au maximum. Les quatre questions ci-dessus ne suffisent plus à déterminer la carte avec certitude. Pour cela, nous ajoutons les trois autres questions (questions 5, 6 et 7).

Exemple : Avec les 7 questions, la carte chien de tout à l'heure est codée par 0111100.

## Codes correcteurs

C'est ainsi que fonctionnent les codes correcteurs d'erreurs. On code par plus de chiffres que nécessaire afin d'être en mesure de corriger une erreur (ou plus) dans chaque suite de bits.

Le principe du code correcteur nous utilisons ici est dû à Richard Hamming (en 1950).

Le codage minimal pour une carte parmi  $16 = 2^{2^3-3-1}$  a une longueur de  $4 = 2^3 - 3 - 1$  bits (les réponses aux 4 premières questions). Le codage avec correction d'une erreur a une longueur de  $7 = 2^3 - 1$  bits.

Pour coder en binaire un nombre compris entre 1 et  $67\ 108\ 864 = 2^{2^5-5-1}$ , on a besoin de  $2^5 - 5 - 1 = 26$  bits. Pour coder ce nombre avec correction d'une erreur dans la suite de bits, on code avec  $2^5 - 1 = 31$  bits.

La formule générale est la suivante : pour coder en autorisant une erreur un nombre compris entre 1 et  $2^{2^m-m-1}$ , on utilise  $2^m - 1$  bits soit  $m$  bits de plus que le nombre minimum de bits pour coder ce nombre.

## Trouver la bonne carte par calcul matriciel, comme un ordinateur.

Notons  $a, b, c, d, e, f, g$  les 7 réponses codées par 0 ou 1. Notons  $V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$V_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $V_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $V_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $V_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $V_6 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et

$V_7 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Construisons  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$  que nous comparerons aux vecteurs

$V_i$ ,<sup>4</sup>

Si  $a + c + e + g$  est pair, alors  $c_1$  vaut 0, sinon  $c_1 = 1$ .

Si  $b + c + f + g$  est pair, alors  $c_2$  vaut 0, sinon  $c_2 = 1$ .

Si  $d + e + f + g$  est pair, alors  $c_3$  vaut 0, sinon  $c_3 = 1$

Si  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ , alors on ne vous a menti à aucune question.

Si le vecteur  $C$  est égal à un vecteur  $V_i$  ce qui signifie qu'on vous a menti à la question  $i$ .

À présent que vous savez si on vous a menti et à quelle question on vous a menti, vous pouvez corriger le mensonge et déterminer la carte en regardant les réponses aux 4 premières questions.

Évidemment, on peut aussi programmer cela.

## Trouver la bonne carte par calcul et déduction

Notons  $a, b, c, d, e, f, g$  les 7 réponses codées par 0 ou 1. Effectuez les 3 calculs suivants :

$$a + c + e + g$$

$$b + c + f + g$$

$$d + e + f + g.$$

Si  $a + c + e + g$  est pair, cela signifie que  $a, c, e, g$  ne contiennent pas de mensonge. Si  $a + c + e + g$  est impair, cela signifie que le mensonge est parmi  $a, c, e, g$  ne contiennent pas de mensonge.

Par exemple, si les réponses sont codées par : 0111110, on obtient  $a + c + e + g = 2$ ,  $b + c + f + g = 3$  et  $d + e + f + g = 3$ . Donc il y a mensonge et le mensonge est parmi  $b, c, f, g$  et parmi  $d, e, f, g$ , mais pas parmi  $a, c, e, g$ . On en déduit que le mensonge est en  $f$ , c'est-à-dire à la question 6 "y a-t-il une balle?" la réponse correcte était "non il n'y a pas de balle", la vraies

---

4. En fait  $C$  s'obtient comme le produit matriciel  $aV_1 + bV_2 + cV_3 + dV_4 + eV_5 + fV_6 + gV_7$  pris modulo 2.

réponses étaient donc : 0111100 et la carte choisie le deuxième chien en partant du haut à gauche.

## Trouver la bonne carte par manipulation des cartes

Disposez les 16 cartes comme sur l'image.

À chaque question, il est important de bien identifier les cartes rejetées par la personne à chaque question :

- Si la personne répond "non", les cartes rejetées sont celles proposées (par exemple les cartes "chat" si la personne dit "non" à la première question) ;
- si la personne répond "oui", les cartes rejetées sont les autres (par exemple les cartes "chiens" si la personne dit oui à la première question).

Quand la personne rejette des cartes :

- Tournez d'un quart de tour les cartes rejetées pour la première fois ;
- Retournez face contre la table les cartes rejetées pour la seconde fois.

Tout le monde verra ainsi le nombre de possibilités diminuer au fur et à mesure des questions.

La carte recherchée est la seule dont la face est encore visible après la 7ème question. Si elle est dans sa position initiale, cela signifie que la personne n'a menti à aucune question. Si la carte est tournée d'un quart de tour, cela signifie qu'il y a eu un mensonge.

Pour trouver la question à laquelle le mensonge a eu lieu, on peut par exemple comparer les réponses (si on les a notées) à la réalité.

## Construction des questions

Les quatre premières questions permettent de diviser les possibilités par 2 à chaque étape. Si  $a, b, c, d$  sont les codes des vraies réponses à ces 4 questions, on construit ensuite les 3 dernières questions (en attribuant les symboles cœur, balle et gamelle) de sorte que les vraies réponses à ces questions sont codées, modulo 2, par  $e = b + c + d$ ,  $f = a + c + d$  et  $g = a + b + d$ .

## 29 Pythagore et frettes sur une guitare

Comme vous le savez peut-être, Pythagore a découvert qu'il y a 12 notes naturelles dans une octave (bien avant la connaissance de do, ré, mi, fa, sol, la, si, do). On va voir comment mettre les frettes sur une guitare pythagoricienne (et aussi sur une guitare classique).

### 29.1 Octave et suite des quintes

Les notes peuvent être vues comme des classes d'équivalence (modulo 2 multiplicativement) de fréquences fondamentales.

Soit  $F_0$  la fréquence fondamentale de la note émise par une corde tendue de longueur  $L_0$  (cette longueur est appelée **le diapason**).

- Tout d'abord,  $2F_0$  est la fréquence fondamentale de la note émise par une corde pincée en sa moitié. La vibration de la corde pincée à la moitié fait vibrer une autre corde identique non pincée. La note obtenue est la note à l'**octave supérieure**.
- Ensuite Pythagore pince aux  $2/3$  la corde et crée une deuxième nouvelle note (ce qui correspond au passage de  $F_0$  à  $f_1 := (3/2) * F_0$ . Cet écart correspond à la **quinte naturelle** ou quinte des physiciens. Quand la corde vibre alors qu'on effleure la corde aux  $2/3$  de la longueur on sent une vibration spéciale (qu'on appelle souvent troisième harmonique). Donc Pythagore crée une seconde note de façon non arbitraire.

Il réitère ce procédé et obtient la suite de fréquences donnée par  $f_k = (3/2)^k F_0$ , qu'on appelle suite des **quintes de Pythagore**.

**Première question :** Calculer (sous forme d'une fraction fois  $F_0$ ) les 12 premières quintes de Pythagore  $f_1, \dots, f_{12}$ .

**Deuxième question :** Calculer (sous forme d'une fraction fois  $L_0$ ) les longueurs de cordes correspondantes  $\ell_1, \dots, \ell_{12}$ .

### 29.2 Normaliser les fréquences

Pythagore utilise ensuite l'identification liée à l'octave en multipliant par 2 autant de fois que nécessaire chaque longueur  $\ell_k$  de la suite des quintes pour se ramener à une longueur  $L_k$  comprise entre  $[(1/2)L_0, L_0]$ . En termes de fréquence, cela revient à diviser par 2 autant de fois que nécessaire la fréquence  $f_k$  de manière à se ramener à une fréquence  $F_k$  dans  $[F_0, 2F_0]$ .

**Troisième question :** Donner la suite  $F_0, \dots, F_{12}$  des fréquences ainsi obtenues après normalisation.

On pourrait continuer indéfiniment le cycle des quintes ne s'arrête jamais car il n'existe aucun entier couple d'entiers  $(k, m)$  avec  $k \geq 1$  tel que  $(3/2)^k(1/2)^m = 1$ .

On observe que la dernière fréquence  $F_{12}$  est très proche de  $F_0$ , on ne la conserve pas ; et on arrive ainsi à 12 notes de fréquences  $F_0, \dots, F_{11}$ . Le fait que  $F_{12} \neq F_0$  créera une "quinte fausse" dans le cycle des quintes.

**Remarque.** On peut aussi construire au fur à mesure ces fréquences renormalisées : en multipliant à chaque étape la fréquence par  $3/2$  et en divisant par 2 si nécessaire pour se ramener dans l'intervalle de fréquence  $[F_0, 2F_0]$ .

### 29.3 Application à la pose des frettes.

On déduit de ce qui précède la suite des longueurs  $L_k$  "sonnantes" dans l'intervalle  $[L_0/2, L_0]$ .

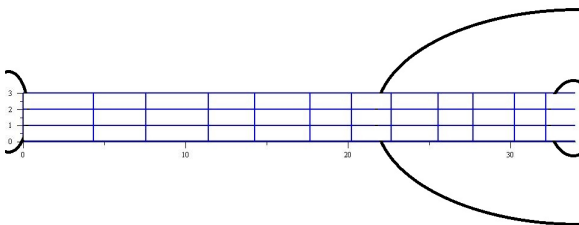
**Quatrième question :** Donner la suite  $L_0, \dots, L_{11}$  des longueurs correspondant aux fréquences  $F_0, \dots, F_{11}$ .

Mais on met les frettes en mesurant à partir du sillet et la suite des distances au sillet est donnée par la suite  $\lambda$  suivante

$$\lambda_k := L_0 - L_k$$

**Cinquième question.** Calculer  $\lambda_k$  pour  $k = 0, \dots, 11$ .

**Sixième question.** Calculer ces valeurs et ordonner les de façon croissante pour un diapason de longueur  $L_0 = 68cm$ .



**Septième question.** Calculer la longueur  $\lambda_{12}$  à laquelle il aurait fallu mettre le sillet correspondant à la fréquence  $f_{12}$  que nous avons éliminée.

## 30 Une course aléatoire en milieu aléatoire

matériel : un jeu de 56 cartes; 1 dé, des pions .

### Milieu aléatoire

On prend les 24 cartes numérotées de 1 à 6 d'un jeu de 56 cartes.

On demande à quelqu'un de mélanger ces cartes. Une fois mélangées, on utilise les cartes pour faire un "circuit" en les posant les unes après les autres en cercle, en marquant une ligne de départ et d'arrivée.

Ce circuit constitue un "milieu aléatoire" que des pions vont parcourir jusqu'à dépasser la ligne d'arrivée.

### Pari sur le résultat de la course

Puis on parie la carte sur laquelle les pions vont arriver (on pose un pion dessus).

À ce jeu, on a raison dans environ 93% des cas. De plus, pour environ 80% des circuits, les pions termineront leur course sur la même carte, quel que soit leur point de départ parmi les 6 premières cartes.

Ces pourcentages sont estimés en simulant sur ordinateur un grand nombre de parties.

### Jeu

On demande à la personne de lancer un dé à 6 faces. Le résultat du lancer de dé indique la carte de départ (si le lancer de dé donne '1' son pion partira de la première carte posée après la ligne d'arrivée/départ, si le lancer de dé donne '2' son pion partira de la carte suivante, et ainsi de suite).

La personne prend un pion, le pose sur la carte de départ désignée par le lancer de dé et le déplace sur le circuit dans le sens des aiguilles d'une montre en sautant de carte en carte, le saut suivant étant donné par le nombre indiqué sur la carte sur laquelle le pion se trouve. La partie se termine lorsque le pion arrive sur une carte en franchissant la ligne d'arrivée/départ.

### Choix de la carte d'arrivée du pari

Quand on pose les cartes en circuit, on en profite pour calculer le parcours que ferait le pion en partant de la première carte du circuit.

On remarque que, si la première carte n'est pas un 6, alors le premier saut se fait sur une autre des 6 premières cartes et donc la case d'arrivée sera la même pour ces deux points de départ, au moins.

## 31 Le modèle de Galton et Watson ou une étude du devenir des noms de famille au XIX-ième siècle

Martin Gourlaouen a des fils, ses fils ont eu eux-mêmes des fils qui auront peut-être aussi des fils...

En 1874, Francis Galton et Henry Watson ont proposé un modèle simple d'un tel arbre généalogique afin d'étudier l'extinction des noms de famille (c'est pourquoi on ne s'intéresse qu'aux garçons ; n'oublions pas que c'était au XIX-ième siècle!). Dans leur modèle, ces deux mathématiciens supposent que tous les hommes, indépendamment les uns des autres, ont la même probabilité  $p_0$  d'avoir 0 fils, la même probabilité  $p_1$  d'avoir 1 fils, etc.

Activité : Utiliser ce modèle et un dé pour simuler la descendance masculine d'un individu si l'on suppose que  $p_0 = 1/3$ ,  $p_1 = 1/2$  et  $p_2 = 1/6$ ?

Revenons à la situation générale. Pour un entier  $N$  assez grand, on peut admettre que la probabilité qu'un individu donné ait plus de  $N$  fils est nulle (par exemple,  $N = 100$  doit convenir!).

On a alors extinction de la filiation à coup sûr si :

$$0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + \dots + N \times p_N \leq 1.$$

Sinon, on a extinction de la filiation avec probabilité  $x$  égale à l'unique valeur  $x$  dans  $[0, 1[$  vérifiant :

$$p_0 + p_1 \times x + p_2 \times x^2 + \dots + p_N \times x^N = x.$$

Dans l'exemple précédent, y a-t-il extinction à coup sûr de la descendance masculine de n'importe quel individu ?

(voir la partie *Solutions et explications* pour les explications mathématiques)

Le modèle de Galton et Watson permet en fait d'étudier bien d'autres phénomènes (croissance de colonies de bactéries, propagation d'épidémies, réactions nucléaires en chaînes,...). De nombreuses variantes moins simplistes de ce modèle ont été élaborées ; certaines d'entre elles faisant à l'heure actuelle l'objet d'intenses recherches.

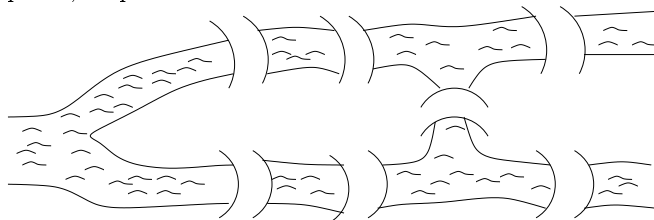
## 32 Serrons-nous la main

Monsieur et Madame Bourbaki assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. Personne ne se serre la main à lui-même et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. Mr Bourbaki constate que les 7 autres personnes ont échangé des nombres de poignées de mains tous distincts. Combien de poignées de mains Mr et Mme Bourbaki ont-ils échangées avec les autres personnes présentes ? Peut-on généraliser à  $n$  couples ?

(voir la partie *Solutions et explications* pour les explications mathématiques)

## 33 Problème des ponts de Königsberg

Au 18ème siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait 7 ponts, disposés selon le schéma ci-dessous.



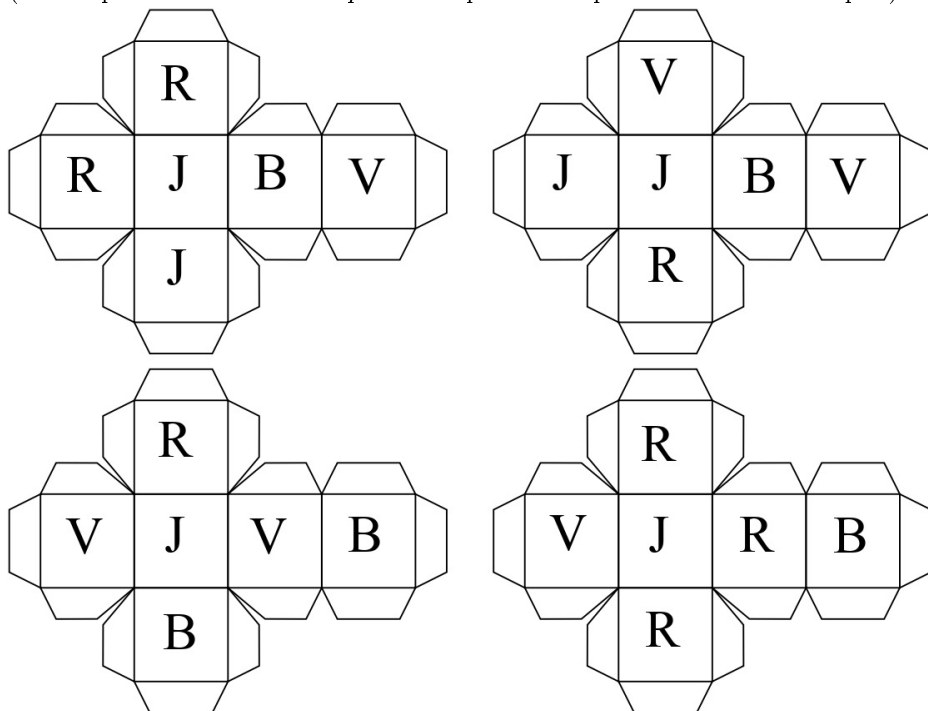
Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?

(voir la partie *Solutions et explications* pour les explications mathématiques)

## 34 Instant insanity

Soient quatre cubes dont les faces sont colorées en rouge, vert, bleu et jaune de telle façon que chaque cube contient au moins une face de chaque couleur : le problème est d'empiler ces quatre cubes de sorte que chaque face de la barre résultante contienne les quatre couleurs. Aucune chance de trouver le bon agencement parmi les 331 776 possibilités ! On peut se poser la question pour tout ensemble "4 cubes". On étudie un ensemble "4 cubes" particulier pour lequel le bon agencement est décrit au moyen de graphes. Voici les modèles de ces 4 cubes (avec les notations R pour rouge, V pour vert, B pour bleu et J pour jaune).

(voir la partie *Solutions et explications* pour les explications mathématiques)



## 35 Polyèdres platoniciens

On s'intéresse aux polyèdres convexes (enveloppe convexe d'un nombre fini de points de  $\mathbb{R}^3$ ) qui satisfont les propriétés suivantes :

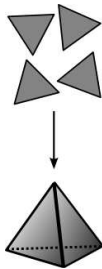
- Les faces sont des polygones réguliers à  $n$  côtés. Toutes les arêtes ont même longueur.
- Le nombre d'arêtes en chaque sommet du polyèdre ne dépend pas du sommet considéré. Notons  $k$  ce nombre d'arêtes.

Nous allons prouver qu'il n'y en a que cinq tels polyèdres.

Le ballon de football est un polyèdre mais ses faces ne sont pas toutes les mêmes : il comporte douze pentagones (5 côtés) et vingt hexagones (6 côtés) ; il ne fait donc pas partie des polyèdres platoniciens.

Notons  $\mathbf{S}$  le nombre de sommets,  $\mathbf{A}$  le nombre d'arêtes et  $\mathbf{F}$  le nombre de faces d'un tel polyèdre. Calculons les valeurs possibles pour  $n$ ,  $k$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{F}$ .

Comme le polyèdre est convexe, on a la *formule d'Euler*,  $\mathbf{F} - \mathbf{A} + \mathbf{S} = 2$ .  
Soit  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{F}$  le nombre total de sommets, d'arêtes et de faces avant assemblage :



$$\begin{aligned}\tilde{S} &= 12 \\ \tilde{A} &= 12 \\ \tilde{F} &= 4\end{aligned}$$

On a les relations :

$$\tilde{S} = \tilde{A} = n\tilde{F}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= 4 \\ \mathbf{A} &= 6 \\ \mathbf{F} &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \tilde{S}/k \\ \mathbf{A} &= \tilde{A}/2 \\ \mathbf{F} &= \tilde{F}\end{aligned}$$

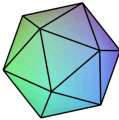
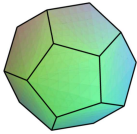
Ce qui donne :  $(n(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}) + 1)\mathbf{F} = 2$ .

Comme  $\mathbf{F} > 0$ , on doit donc avoir :  $1 > n(\frac{1}{2} - \frac{1}{k})$ .

Comme  $k \geq 3$ , on a :  $\frac{1}{2} - \frac{1}{k} \geq 1/6$ , d'où l'encadrement :  $1 > n(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}) \geq n/6$ .  
Par conséquent,  $3 \leq n < 6$ .

La relation  $\frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$  implique  $\frac{2n}{n-2} > k$ , ce qui laisse comme possibilités :  
 $n = 4, k = 3$  ;  $n = 5, k = 3$  ;  $n = 3, k = 3, 4, 5$ .

De là, on en déduit les valeurs de  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{F}$  :  $\mathbf{F} = \frac{2}{1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{k})n}$ ,  $\mathbf{S} = \frac{n}{k}\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{A} = \frac{n}{2}\mathbf{F}$ .



n	k	S	A	F	
3	3	4	6	4	tétraèdre
3	4	6	12	8	octaèdre
3	5	12	30	20	icosaèdre
4	3	8	12	6	cube
5	3	20	30	12	dodécaèdre

## Deuxième partie

# Solutions et explications

### 1. Tour de magie : le comptage des cubes

#### Explications

Soit un entier  $A \geq 1$ . Posons  $B := A + 1$  (dans notre exemple on a  $A = 10$  et  $B = 11$ ).

On a  $N = Q \times A + R(A)$  et  $N = Q' \times B + R(B)$ . Comme  $B = A + 1$ , on a :  
 $N = N(B - A) = N \times B - N \times A = (Q \times A + R(A)) \times B - (Q' \times B + R(B)) \times A$ .  
Donc :  $N = A \times B \times (Q - Q') + B \times R(A) - A \times R(B)$ .

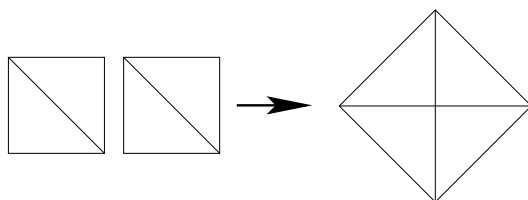
Généralisation au cas où  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux (c'est-à-dire que les seuls diviseurs communs à  $A$  et  $B$  sont 1 et -1), le théorème chinois est encore valable. Le théorème de Bezout nous assure que l'on peut trouver deux entiers (positifs ou négatifs)  $U$  et  $V$  tels que :  $A \times U + B \times V = 1$ . On a :

$N = (A \times U + B \times V) \times N = A \times U \times (Q' \times B + R(B)) + B \times V \times (Q \times A + R(A))$   
Donc :  $N = A \times B \times (Q' \times U + Q \times V) + A \times U \times R(B) + B \times V \times R(A)$ .

Le nombre  $N$  de cubes est :  $A \times U \times R(B) + B \times V \times R(A)$  plus ou moins un multiple de  $A \times B$  : il n'y a qu'un seul nombre de ce type entre 0 et  $A \times B - 1$ !!!!

### 2. Le théorème de Pythagore

Duplication du carré : Construction d'un carré de surface  $2 m^2$  à partir de deux carrés de surface  $1 m^2$ .



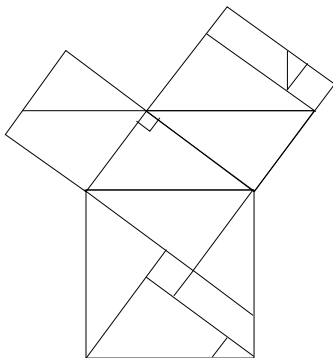
Duplication du cube :

Il n'existe pas de tel découpage (à la règle et au compas) permettant la duplication du cube. La longueur des arêtes d'un cube de  $2m^3$  est de  $\sqrt[3]{2}m$ . Le problème est de construire cette longueur. En 1760, d'Alembert écrivit qu'aucune solution plane n'a été trouvée. En 1837, Pierre-Laurent Wantzel montra l'impossibilité de cette construction à la règle et au compas. Des constructions plus compliquées existent cependant (intersection de coniques ; intersection entre un cône et un tore).

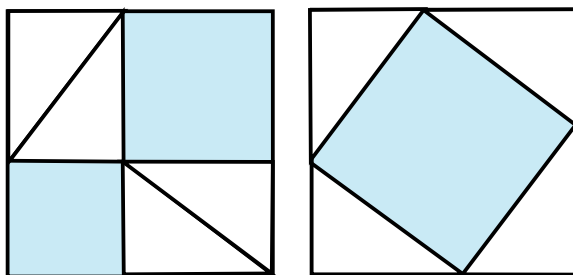
Solution du premier puzzle :

Une indication : l'hypothénuse des deux grands triangles rectangles correspond à la longueur des côtés du grand carré.

L'astuce pour faire rapidement le puzzle est de penser à reconstituer 4 triangles rectangles, à placer leurs hypothénuses sur les 4 côtés du grand carré et à mettre le petit carré au centre (ne pas mettre les angles droits des pièces du puzzle aux 4 coins du carré!!!).

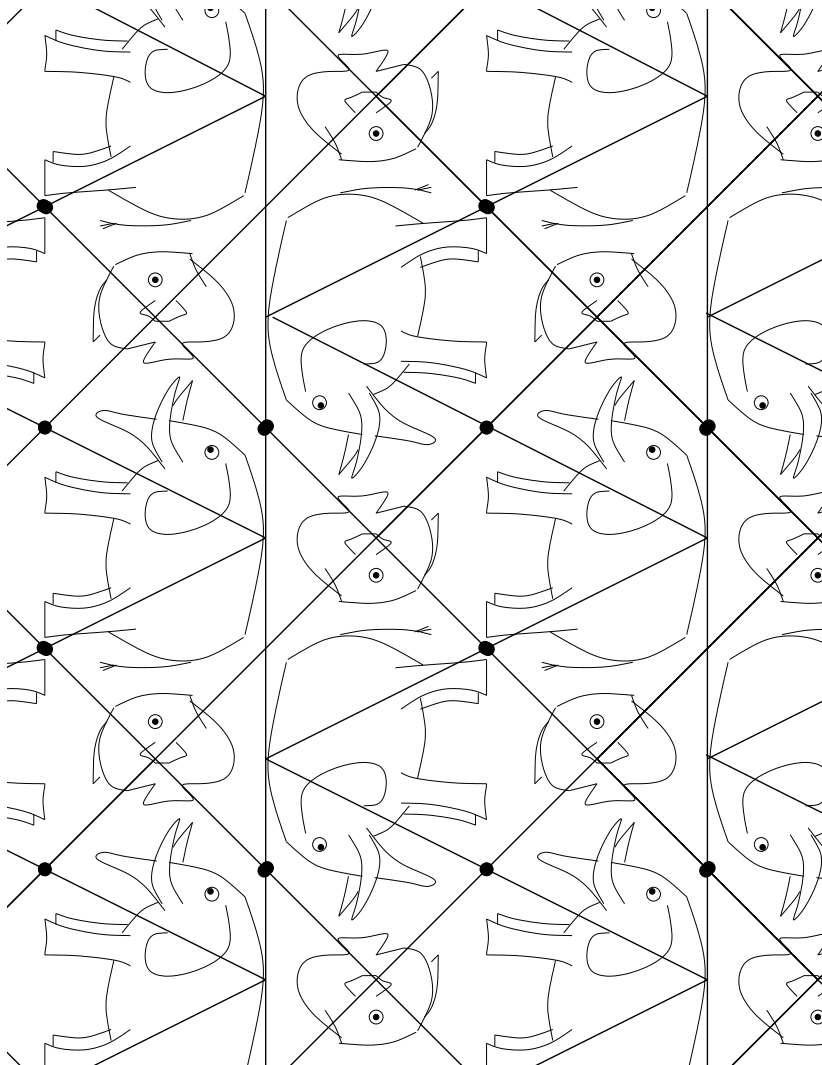


Solution du second puzzle :



### 3. Découpage de carré et triangle isocèle ; pavage

On peut passer d'une forme (carré) à l'autre (triangle isocèle) par des transformations géométriques si on articule les pièces aux endroits indiqués par les points.



## 4. L'identité d'Euler sur des ballons

On commence par créer un nombre nombre aussi petit que possible d'arêtes et de sommets de sorte à faire apparaître une ou plusieurs faces.

On peut choisir de partir d'un dessin d'arêtes et de sommets déjà réalisé, en ne considérant qu'une partie des arêtes dessinées en supprimant certains sommets de sorte à réunir les arêtes en un plus petit nombre d'arêtes plus longues).

- Dans le cas du ballon, on peut prendre  $F = 2$ ,  $A = 1$  et  $S = 1$  en dessinant une arête revenant à son point de départ.
- Dans le cas de la bouée cela donne  $F = 1$ ,  $A = 1$  et  $S = 1$  (pour créer des faces, l'arête doit "couper l'anneau" pour faire "disparaître" le trou).

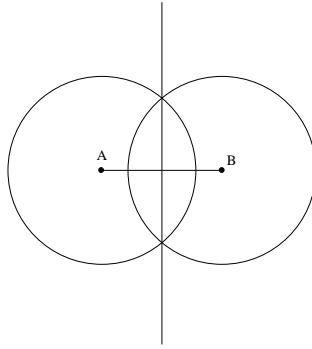
Voyons à présent que le nombre  $F - A + S$  ne change pas quand on ajoute une arête. Quand on crée une nouvelle arête (donc une arête de plus), on coupe une face en deux donc on ajoute une face (donc une face de plus), ce qui ne change pas la valeur de  $F - A + S$ . De plus :

- si une extrémité de l'arête correspond à un des sommets déjà existants, alors cette extrémité ne crée ni face, ni arête, ni sommet supplémentaire.
- si une extrémité de l'arête se trouve en plein milieu d'une arête, alors on crée en plus à la fois un nouveau sommet et une nouvelle arête (puisque'on a transformé une arête en deux), ce qui ne change pas la valeur de  $F - A + S$ .

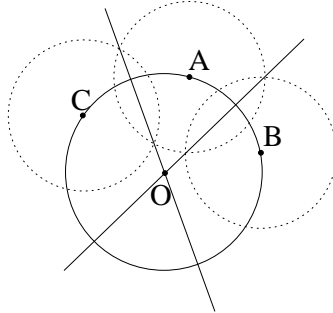
## 5. Découpage de gâteaux à la règle et au compas

(0) Comment tracer la médiatrice d'un segment  $[A, B]$  ?

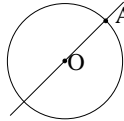
La médiatrice de  $[A, B]$  est l'ensemble des points situés à égale distance de  $A$  et de  $B$  ; c'est la droite passant par le milieu du segment et perpendiculaire au segment. La médiatrice de  $[A, B]$  passe par les deux points d'intersection des cercles de diamètre  $AB$  de centres respectifs  $A$  et  $B$ .



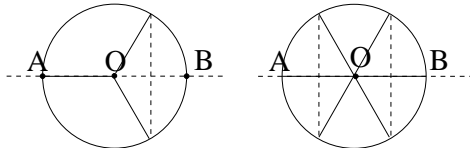
- (1) Dessiner la forme du gâteau sur une feuille et trouver le centre  $O$ .  
 On choisit trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur le cercle. Le centre  $O$  est le point d'intersection des médiatrices de  $[A, B]$  et de  $[A, C]$ .



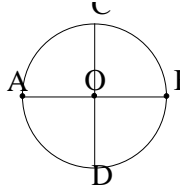
- (2) Couper le gâteau en deux parts égales.  
 On choisit un point  $A$  sur le cercle et on trace la droite passant par  $O$  et  $A$ .



- (3) Couper le gâteau en trois parts ou en six parts égales.  
 On choisit deux points  $A$  et  $B$  diamétralement opposés. On construit les points d'intersection  $C$  et  $C'$  de la médiatrice de  $[O, B]$  avec le cercle.

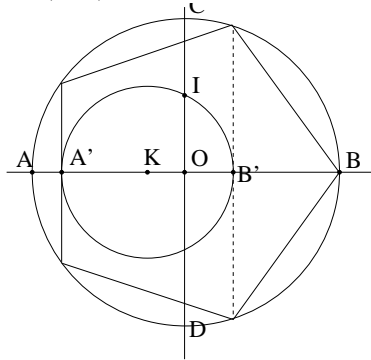


- (4) Couper le gâteau en quatre parts égales.  
 On trace un diamètre  $[A, B]$  et la médiatrice de  $[A, B]$ .

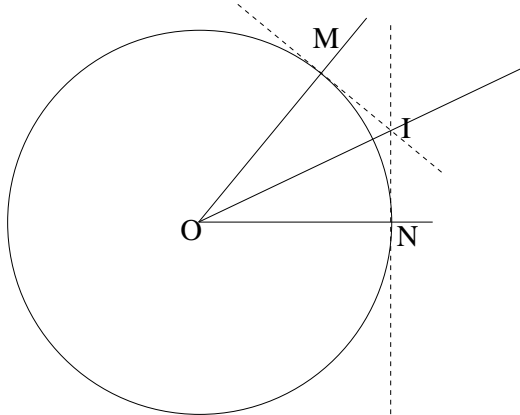


(5) Couper le gâteau en cinq parts égales.

On trace quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  comme dans le (4). On construit le milieu  $I$  de  $[O, C]$  et le point  $K$  de  $[O, A]$  tel que  $OK = OA/4$ . On trace le cercle de centre  $K$  passant par  $I$ . Notons  $A'$  et  $B'$  les points d'intersection de ce cercle avec le diamètre  $[A, B]$ . Les sommets du pentagone régulier sont les points d'intersection du cercle initial avec les droites parallèles à  $(CD)$  passant par  $A'$  et  $B'$ .



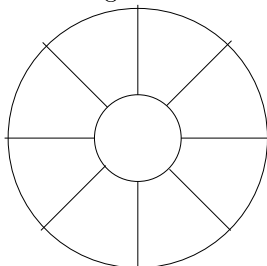
(6) Couper une part en deux.



On trace la bissectrice de cet angle en traçant la droite joignant  $O$  et le point d'intersection  $I$  de la droite perpendiculaire à  $(OM)$  passant par  $M$  et la droite perpendiculaire à  $(ON)$  passant par  $N$ .

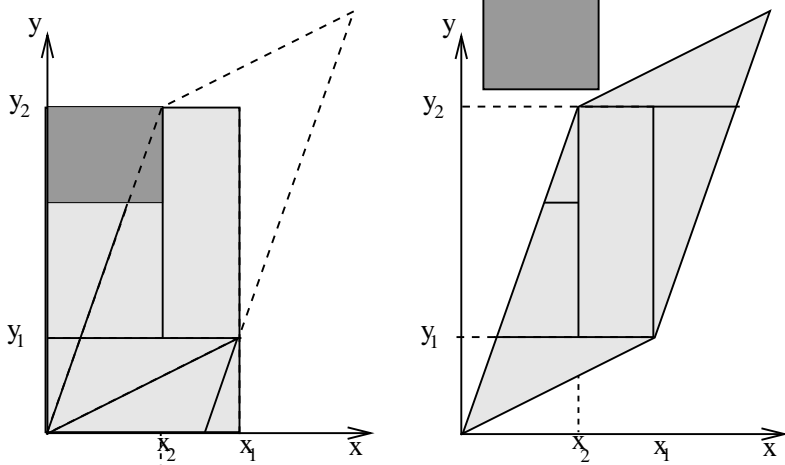
En général, on ne peut pas couper une part en trois à la règle et au compas.

- (7) Couper le gâteau en 9 parts sans faire de jaloux.  
 Il n'existe pas de découpage en 9 parts égales à la règle et au compas.  
 Mais si le gâteau est bien homogène on peut utiliser l'astuce suivante :  
 on enlève au centre du gâteau un disque de rayon le tiers du rayon  $R$   
 du gâteau. On coupe le reste du gâteau en 8.



## 8. Découpage de parallélogramme

Le découpage du parallélogramme est donné sur la figure de droite.  
 Si on lui ajoute le petit rectangle foncé de largeur  $x_2$  et de longueur  $y_1$ , on  
 obtient le grand rectangle de largeur  $x_1$  et de longueur  $y_2$ .  
 On a ainsi prouvé que l'aire du parallélogramme est égale à l'aire du grand  
 rectangle ( $x_1 \times y_2$ ) moins l'aire du petit rectangle ( $x_2 \times y_1$ ).



## 10. Problème de la reine Didon

Prenez votre corde et essayez de résoudre le demi-problème de la reine Didon.  
 Une fois que la corde a été mise. Pour voir si on peut faire mieux et résoudre

le problème :

- On remarque tout d'abord que la forme optimale doit être convexe c'est-à-dire que si on se donne deux points  $P$  et  $Q$  sur la corde, aucune partie de la corde ne doit se trouver entre le segment  $PQ$  et le mur. En effet si une partie de la corde est entre le segment  $PQ$  et le mur, on peut agrandir la surface en prenant son symétrique par rapport à la droite  $(PQ)$ .
- On appelle  $A$  et  $B$  les deux extrémités de la corde (qui touchent le mur ou le miroir).
- On choisit un point  $C$  quelque part sur la corde (en fait il faudrait le vérifier en tout point de la corde).
- On considère le triangle  $ABC$ .
- Si vous avez résolu le problème, forcément le triangle  $ABC$  doit être d'aire maximale parmi les triangles ayant deux côtés de longueur  $AC$  et  $BC$ . Sinon en agrandissant le triangle tout en gardant la même forme à la partie de la corde d'extrémité  $AC$  et à celle d'extrémité  $BC$ , on peut agrandir la surface encerclée.
- Or l'aire d'un triangle est égale à la moitié de sa base  $AC$  fois sa hauteur issue de  $B$  et cette hauteur (mesurant la distance entre le point  $B$  et la droite  $(AC)$ ) est au maximum égale à  $BC$ .
- Donc le triangle  $ABC$  est d'aire maximale si la hauteur issue de  $B$  vaut  $BC$ , c'est-à-dire si le triangle est rectangle en  $C$ , ce qui signifie que  $C$  est sur le cercle de diamètre  $AB$  (car un triangle rectangle  $ABC$  est la moitié d'un rectangle  $ABCD$  et les diagonales  $AB$  et  $CD$  se coupent en leur milieu et ont même longueur, ce qui peut se retrouver en considérant simultanément les triangles rectangles  $ABC$  et  $DBC$ ).

Ainsi, la solution du demi-problème de la reine Didon est le demi-cercle et celle du problème de la reine Didon est le cercle.

## 11. Le chemin le plus court

Pour les longues distances, les cartes plates ne sont plus fiables pour déterminer le chemin le plus court. Il est préférable d'utiliser un globe. On voit alors (à l'aide d'une ficelle) que les chemins les plus courts sont le long des "grands cercles" du globe. Les grands cercles sont les cercles sur la surface du globe centrés sur le centre du globe (ce sont les cercles contenant les points de départ et d'arrivée et leurs points antipodaux). Si le point de départ est le pôle nord, les "grands cercles" sont les méridiens (cercles passant par les pôles nord et sud).

## 12. Les géodésiques chez les fourmis

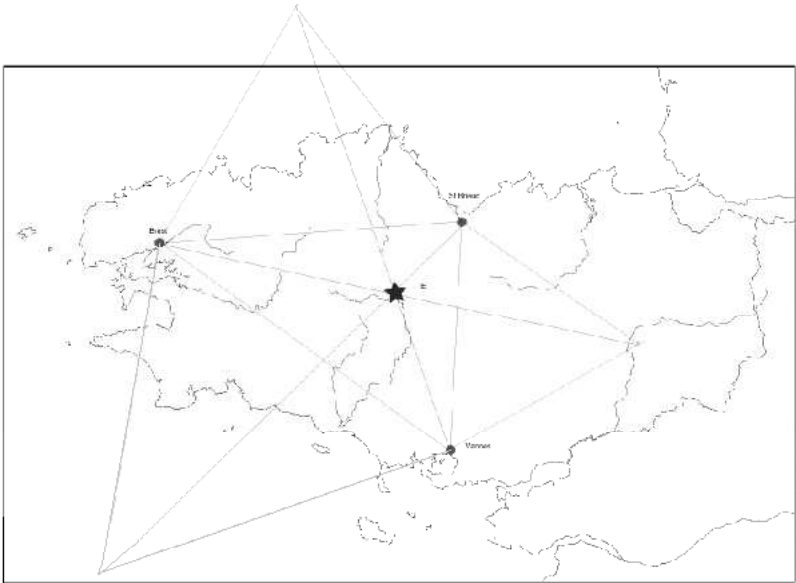
Même si, au départ, les fourmis choisissent au hasard l'un des trois chemins, le chemin le plus court sera parcouru le plus rapidement et donc le plus souvent. Au bout d'un certain temps, il sera donc davantage balisé par les phéromones et ainsi plus emprunté par les fourmis.

## 13. Réseau le plus court

Le lieu  $E$  de l'échangeur n'est pas à égale distance des trois villes, mais ce sont les angles  $(BEV)$ ,  $(BES)$  et  $(SEV)$  qui sont tous égaux à 120 degrés. Voici comment on le construit géométriquement.

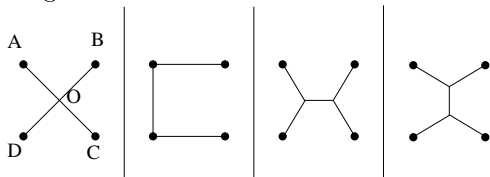
On construit les 3 triangles équilatéraux adjacents au triangle  $BSV$  Brest, St Brieuc et Vannes. Cela fait apparaître 3 nouveaux points  $B'$  (3<sup>ème</sup> sommet du triangle équilatéral basé sur le segment  $[S, V]$ ),  $S'$  et  $V'$  (construits de même). Les 3 droites  $(BB')$ ,  $(SS')$  et  $(VV')$  ont la propriété de se rencontrer. Le point d'intersection (appelé point de Fermat ou de Torricelli) est le point  $E$  qui minimise la somme des distances d'un point courant avec  $B$ ,  $S$ ,  $V$ . De plus  $BE + SE + VE = BB' = SS' = VV'$ .

Remarque  $B'$  n'est pas loin d'être Rennes et l'échangeur  $E$  n'est pas loin d'être Carhaix sur la carte.



Précisons que cette construction est valable pour tout triangle dont les angles intérieurs sont tous inférieurs à 120 degrés. Si l'un des angles est supérieur à 120 degré alors l'échangeur  $E$  minimisant la somme des distances est situé en ce point.

Le réseau minimal reliant les quatre sommets d'un carré n'est pas le réseau diagonal.



Le réseau diagonal (premier réseau) est plus court que le deuxième réseau (car si la longueur du côté vaut  $a$ , la longueur de la diagonale vaut  $a\sqrt{2}$ ).

Mais les réseaux les plus courts sont les deux derniers.

Les échangeurs du troisième réseau correspondent aux échangeurs construits comme ci-dessus pour les triangles AOD et BOC.

## 15. Le jeu de Nim

La stratégie de ce jeu n'est pas très facile à détecter. Si vous vous entraînez bien et que vous jouez avec des gens qui ne la connaissent pas, vous gagnerez sûrement à tous les coups. Voici la stratégie :

- On écrit le codage binaire du nombre de pièces de chaque tas.
- On effectue la somme sans retenue notée  $\oplus$  : on fait la somme terme à terme avec les règles suivantes :  $1 + 0 = 1$  ;  $0 + 0 = 0$  ;  $1 + 1 = 0$ .  
Par exemple  $0110110 \oplus 1110011 = 1000101$
- Il existe une stratégie gagnante pour un joueur si au début de son tour la somme sans retenue ne comporte pas que des 0. La stratégie consiste à se ramener à une somme nulle à la fin de chacun de ses tours.

Exemple. Supposons qu'il y ait cinq tas au début de votre tour : un tas de deux, deux tas de trois, un tas de quatre et un tas de cinq.

- Les codages des cinq tas sont : deux=10, trois=11, trois=11, quatre=100, cinq=101.
- On effectue la somme sans retenue :  $010 \oplus 011 \oplus 011 \oplus 100 \oplus 101 = 011$ , elle est non nulle, on peut donc utiliser la stratégie gagnante.
- On se ramène à une somme nulle en enlevant un tas de trois pièces (complètement) ou bien en enlevant une pièce d'un tas de deux pièces.

Et ainsi de suite...

## 16. Le jeu de pile ou face infini

La stratégie gagnante pour le jeu de pile ou face est la suivante : miser le double de ce que l'on vient de miser : si on gagne au bout de  $n$  coups, on aura perdu  $1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = (2^n - 1)$  fois sa mise initiale et gagné  $2^n$  fois sa mise initiale donc un gain final égal à sa mise initiale.

Attention à ne pas être totalement ruiné avant de gagner!!!

## 17. Le jeu de la table ronde

La stratégie pour la table ronde repose sur la symétrie (par rapport au centre) de la table : Le joueur 1 pose la première pièce au centre puis sa stratégie est la suivante : placer la pièce "en face" de celle que vient de placer le joueur 2.

## 18. Le jeu des bâtonnets

Réponses :

La stratégie gagnante consiste à laisser sur la table à la fin de son tour  $4n + 1$  bâtonnets (c'est-à-dire des paquets de 4 et un tout seul), si cela est possible.

- (a) Si  $N$  est de la forme  $4n + 2$ ,  $4n + 3$  ou  $4n + 4$  (c'est-à-dire si  $N$  n'est pas congru à 1 modulo 4), alors il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur. La stratégie consiste à laisser à la fin de son tour un nombre  $N'$  de bâtonnets avec  $N' = 4n + 1$ . À la fin du tour du second joueur, le nombre  $N''$  de bâtonnets restants est de la forme :

$4(n - 1) + 2$  ou  $4(n - 1) + 3$  ou  $4(n - 1) + 4$ ; et ainsi de suite.

Dans ce cas, le premier joueur contrôle le jeu (il peut décider de gagner ou de perdre) s'il connaît la stratégie gagnante.

Si  $N$  est de la forme  $4n + 1$  (c'est-à-dire si  $N$  est congru à 1 modulo 4); à la fin du tour du premier joueur, il reste un nombre  $N'$  de bâtonnets tel que  $(N' - 1)$  n'est pas divisible par 4. Il existe alors une stratégie gagnante pour le deuxième joueur.

Dans ce cas, c'est le deuxième joueur qui contrôle le jeu.

- (b) Le jeu est juste si le candidat a une stratégie gagnante (par exemple si  $N = 18, 19$  ou  $20$ ).
- (c) Dans le cas général, la stratégie gagnante consiste à laisser à la fin de son tour  $(k + 1)n + 1$  bâtonnets sur la table et le joueur à une stratégie gagnante si au début de son tour le nombre de bâtonnets sur la table est de la forme  $(k + 1)n + p$  avec  $2 \leq p \leq k$ .
- (c) Si le gagnant est celui qui prend le dernier bâtonnet, la stratégie gagnante consiste à laisser sur la table à la fin de son tour  $(k + 1)n$  bâtonnets (c'est-à-dire des paquets de  $k + 1$  et aucun reste), si cela est possible.

## 19. Le jeu des gobelets

Pour savoir ce qu'il est préférable de faire il suffit de calculer la probabilité de gagner si on change et si on ne change pas de gobelet.

Si on ne change pas notre premier choix, la probabilité de gagner est celle d'avoir choisi le bon gobelet dès le début de la partie. Soit une chance sur trois.

Si on décide de changer de gobelets alors il y a deux possibilités. Soit au départ on avait le gobelet contenant le trésor alors à la fin de la partie on partira sans le trésor. Et inversement si au départ du jeu on choisit un gobelet vide à la fin de la partie on gagnera le trésor.

C'est-à-dire qu'on a deux chances sur trois de gagner si on modifie notre premier choix contre une chance sur trois si on ne le modifie pas...

## 20. Le jeu auquel vous ne pouvez pas gagner

Le problème de logique : la phrase est "Vous avez dit que c'est faux".

## 22. Les caustiques de réflexion en équations

La caustique par réflexion est la courbe tangente à tous les rayons réfléchis. On dit que c'est l'enveloppe des rayons réfléchis.

Paramétrons le miroir (cercle de rayon 1) par  $t \mapsto [\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}]$ .

Supposons que la source de lumière soit en  $y = 0$ ,  $x = \infty$  (premier dessin).

Notons  $C_t$  la droite correspondant au rayon réfléchi en le point du cercle paramétré par  $t$ ;  $C_t$  est la droite d'équation  $F(X, Y, t) = 0$  avec :

$$F(X, Y, t) =$$

$$-(4t^3 - 4t)/(1 + 2t^2 + t^4)X - (1 - 6t^2 + t^4)/(1 + 2t^2 + t^4)Y - (2t^3 + 2t)/(1 + 2t^2 + t^4).$$

On peut montrer que l'enveloppe  $\mathcal{E}$  d'une telle famille  $(C_t)_t$  de courbes est l'ensemble des points  $(X, Y)$  tels qu'il existe  $t$  tel que :

$$\begin{cases} (1) & F(X, Y, t) = 0 \\ (2) & \frac{\partial}{\partial t} F(X, Y, t) = 0 \end{cases} .$$

La première équation signifie que le point  $(X, Y)$  est sur la courbe  $C_t$  et la seconde équation signifie alors que la courbe  $\mathcal{E}$  est tangente à  $C_t$  en  $(X, Y)$ .

On trouve ainsi que la caustique est paramétrée par

$$t \mapsto [-1/2(t^6 + 9t^4 - 9t^2 - 1)/(t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1), 8t^3/(t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1)].$$

C'est une néphroïde. Ce que l'on voit dans la tasse est une partie de cette néphroïde.

La néphroïde (comme le cercle, ou l'ellipse, hyperbole, etc..) est une courbe algébrique, i.e. l'ensemble des zéros d'un polynôme à 2 indéterminées. Son équation est de degré 6 (c'est une "sextique") : la voilà :

$$-15Y^2 - 1 + 12X^2 - 48Y^4 + 64Y^6 + 192Y^4X^2 + 192X^4Y^2 + 64X^6 - 96Y^2X^2 - 48X^4$$

## 25. Déterminer la couleur du haut d'une pyramide

Quelques explications mathématiques.

Si on code bleu par 0 à bleu, jaune par 1 et rouge par 2, la règle de construction consiste à choisir la couleur de sorte que la somme des 3 nombres soit un multiple de 3. Si les couleurs des deux pavés du bas sont codées par  $x$  et  $y$ , la couleur du pavé du-dessus est codée par  $-x - y$  modulo 3.

Pour une pyramide de base 4 dont les couleurs des 4 pavés de la base sont codées par  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , le niveau au-dessus de la base est codé par

$$y_1 = -x_1 - x_2, y_2 = -x_2 - x_3, y_3 = -x_3 - x_4 \text{ (modulo 3)},$$

le niveau encore au-dessus est codé par

$$z_1 = -y_1 - y_2, z_2 = -y_2 - y_3 \text{ (modulo 3)},$$

et, finalement, le haut de la tour est codé, modulo 3, par

$$-z_1 - z_2 = y_1 + y_2 + y_2 + y_3 = y_1 + 2y_2 + y_3 = -x_1 - x_2 - 2x_2 - 2x_3 - x_3 - x_4 = -x_1 - x_4, \\ \text{car } 3x_2 = 3x_3 = 0 \text{ modulo } 3.$$

## 26. Déterminer l'année de naissance à partir du reste du numéro de sécurité sociale

Quelques explications.

Le fait que 97 soit un nombre premier assure que tout nombre entier  $N$  non multiple de 97 admet un inverse modulo 97, c'est-à-dire qu'il existe un nombre  $N'$  tel que :  $N' \times N$  soit égal à 1 modulo 97.

Ainsi l'égalité modulo 97 :

$$0 = a \times 10^{12} + bc \times 10^{10} + de \times 10^8 + fg \times 10^6 + hij \times 10^3 + klm + no$$

peut s'écrire, modulo 97 :

$$bc = -a * 10^2 - de/10^2 - fg/10^4 - hij/10^7 - (klm + no)/10^{10}$$

Modulo 97, on a  $10^2 = 3$ ,  $10^3 = 30$ ,  $10^4 = 9$ ,  $10^5 = 10^3 \times 10^2 = 90 = -7$ ,  
 $10^{10} = 10^5 \times 10^5 = 49$ ,  $10^4 \times 33 = 99 = 2$ . Donc  $32 \times 10^2 = 32 \times 3 = 96 = -1$ ,  
 $2 \times 10^{10} = 98 = 1$ , c'est-à-dire  $1/10^2 = -32$ ,  $1/10^{10} = 2$ . Il vient  
 $1/10^7 = 10^3/10^{10} = 30 \times 2 = 60 = -37$  et  
 $1/10^4 = (10^2)^3/10^{10} = 3^3 \times 2 = 54 = -43$ .

D'où la formule :

$$bc = -2 \times no - 3 \times a + 32 \times de + 43 \times fg + 37 \times hij - 2 \times klm \text{ modulo } 97.$$

## 27-D. Cryptographie, petite énigme

Vous envoyez le colis protégé par un cadenas (dont vous avez la clef). Votre ami vous le renvoie avec un autre cadenas par-dessus (dont il a la clef). Vous enlevez votre cadenas et vous lui renvoyez donc le colis protégé par son cadenas. Le double codage est une application de cette petite énigme.

## 29 Pythagore et frettes sur une guitare

**Réponse à la première question.** La suite des 12 premières quintes de Pythagore construite à partir de la fréquence  $F_0$  est  $f_1 = (3/2)F_0$ ,  $f_2 = (9/4)F_0$ ,  $f_3 = (27/8)F_0$ ,  $f_4 = 81/16$ ,  $f_5 = (243/32)F_0$ ,  $f_6 = (729/64)F_0$ ,  $f_7 = (2187/128)F_0$ ,  $f_8 = (6561/256)F_0$ ,  $f_9 = 19683/512F_0$ ,  $f_{10} = (59049/1024)F_0$ ,  $f_{11} = (177147/2048)F_0$ ,  $f_{12} = (531441/4096)F_0$ .

**Réponse à la deuxième question.** La suite de fréquences ci-dessus correspond à la suite suivante de longueurs pour un diapason (longueur de corde à vide) noté  $L_0$  :

$l_1 = (2/3)L_0$ ,  $l_2 = (4/9)L_0$ ,  $l_3 = (8/27)L_0$ ,  $l_4 = (16/81)L_0$ ,  $l_5 = (32/243)L_0$ ,  $l_6 = (64/729)L_0$ ,  $l_7 = (128/2187)L_0$ ,  $l_8 = (256/6561)L_0$ ,  $l_9 = (512/19683)L_0$ ,  $l_{10} = (1024/59049)L_0$ ,  $l_{11} = (2048/177147)L_0$ ,  $l_{12} = (4096/531441)L_0$ .

**Réponse mathématique à la troisième question.** On rappelle que  $f_k = (3/2)^k F_0$  et  $l_k = (2/3)^k L_0$ . La fréquence normalisée sera la fréquence  $F_k = f_k/2^{m_k} = (3/2)^k F_0 (1/2)^{m_k}$  où  $m_k$  est un entier tel que  $F_0 \leq f_k (1/2)^{m_k} < 2F_0$ . Il s'agit de trouver une suite d'entiers  $m_k$  telle que :

$$F_0 \leq (3/2)^k F_0 (1/2)^{m_k} < 2F_0,$$

c'est-à-dire telle que

$$1 \leq (3/2)^k (1/2)^{m_k} < 2,$$

Il faut donc trouver  $m_k$  tel que

$$2^{m_k} \leq (3/2)^k < 2^{m_k+1}$$

ou encore

$$m_k \leq \log_2((3/2)^k) = (\ln((3/2)^k)/\ln(2)) < m_k + 1.$$

Finalement

$$m_k = \lfloor \log_2((3/2)^k) \rfloor = \lfloor k \log_2(3/2) \rfloor,$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière.

Donc la suite des  $m_k$  pour  $k = 0, \dots, 12$  est

$$m := 0; 0; 1; 1; 2; 2; 3; 4; 4; 5; 5; 6.$$

Donc la suite de fréquences "normalisées dans  $[F_0, 2F_0]$  est  
 $F_0, F_1 = (3/2)F_0, F_2 = (9/8)F_0, F_3 = (27/16)F_0, F_4 = (81/64)F_0,$   
 $F_5 = (243/128)F_0, F_6 = (729/512)F_0, F_7 = (2187/2048)F_0,$   
 $F_8 = (6561/4096)F_0, F_9 = (19683/16384)F_0, F_{10} = (59049/32768)F_0,$   
 $F_{11} = (177147/131072)F_0, F_{12} = (531441/524288)F_0.$

**Réponse mathématique à la quatrième question.** Soit  $L_0$  la longueur 'à' vide de notre guitare pythagoricienne. Les longueurs des cordes utiles sont en proportion inverse des 'fréquences' :  $L_k = (F_0/F_k)L_0$ , d'où 'une suite de longueurs

$$L_k := (2/3)^k (2)^{\lfloor k \log_2((3/2)) \rfloor} L_0, \quad \text{pour } k = 0, \dots, 11$$

c'est-à-dire

$L_0, (2/3)L_0, (8/9)L_0, (16/27)L_0, (64/81)L_0, (128/243)L_0, (512/729)L_0,$   
 $(2048/2187)L_0, (4096/6561)L_0, (16384/19683)L_0, (32768/59049)L_0,$   
 $(131072/177147)L_0.$

ce qui est approximativement égal à

$L_0; 0,6666666667L_0; 0,8888888889L_0; 0,5925925926L_0; 0,7901234568L_0;$   
 $0,5267489712L_0; 0,7023319616L_0; 0,9364426155L_0; 0,6242950770L_0;$   
 $0,8323934360L_0; 0,5549289573L_0; 0,7399052764L_0; 0,9865403685L_0.$

**Réponse à la cinquième question.** On a

$$\lambda_k := L_0 - L_k = \left(1 - (2/3)^k 2^{\lfloor k \log_2(3/2) \rfloor}\right) L_0, \quad \text{pour } k = 0, \dots, 12$$

c'est-à-dire

$0; (1/3)L_0; (1/9)L_0; (11/27)L_0; (17/81)L_0; (115/243)L_0; (217/729)L_0,$   
 $(139/2187)L_0; (2465/6561)L_0; (3299/19683)L_0; (26281/59049)L_0;$   
 $(46075/177147)L_0,$

ce qui vaut approximativement

$0,0000000000; 0,3333333333L_0; 0,1111111111L_0; 0,4074074074L_0;$   
 $0,2098765432L_0; 0,4732510288L_0; 0,2976680384L_0; 0,0635573845L_0;$   
 $0,3757049230L_0; 0,1676065640L_0; 0,4450710427L_0; 0,2600947236L_0$

**Réponse à la sixième question.** Pour un diapason de 68 cm, on obtient la suite suivante pour les longueurs  $\lambda_k$  :

$0; 4,321902146; 7,555555555; 11,39724635; 14,27160494; 17,68644120;$   
 $20,24142661; 22,66666666; 25,54793476; 27,70370370; 30,26483090;$   
 $32,18106996.$

**Réponse à la sixième question.**  $\lambda_{12} = (7153/531441) \times 64 \approx 0,09152496$ , soit à moins d'1mm du sillet.

## 31. Le modèle de Galton et Watson

Pour chaque individu qui apparaît dans l'arbre généalogique, on lance un dé et on lui attribue : aucun fils si le résultat du lancer vaut 1 ou 2 ; un fils si on

obtient 3, 4 ou 5 ; 2 fils si le résultat du lancer vaut 6. Dans cet exemple, la probabilité d'extinction est égale à 1 car  $0 \times 1/3 + 1 \times 1/2 + 2 \times 1/6 = 5/6 < 1$ .

## 32. Serrons-nous la main

Les Bourbaki ont échangé chacun 3 poignées de mains.

Remarquons que les nombres possibles de mains serrées possible pour chaque personne est : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Comme les 7 personnes (autres que M. Bourbaki) ont serré un nombre de mains tous distincts, ces 7 nombres sont pris.

Mme Bourbaki n'a pas serré 6 mains sinon les 6 autres personnes auraient toutes serré la main d'au moins une personne (pas de 0 parmi les 7).

Une personne d'un autre couple a donc serré 6 mains. Son conjoint est la seule personne (parmi les 7) qui peut n'avoir serré la main à 0 personne. Nous avons donc un couple (6,0).

Oublions ce couple C et recommençons, nous avons à présent le couple Bourbaki et deux autres couples. Les mains serrées par les 5 personnes autres que M. Bourbaki (sans compter le couple C) sont : 0, 1, 2, 3, 4.

Comme précédemment, ce n'est pas Mme Bourbaki qui a serré les mains de 4 personnes en dehors du couple C. Le conjoint de la personne qui l'a fait a serré 0 main en dehors du couple C. Cela donne un couple  $(4+1,0+1)=(5,1)$ .

Oublions ce couple D et recommençons, nous avons à présent le couple Bourbaki et un autre couple. Les mains serrées par les 3 personnes autres que M. Bourbaki (sans compter les couples C et D) sont : 0, 1, 2, 3.

Comme précédemment, ce n'est pas Mme Bourbaki qui a serré les mains de 2 personnes en dehors des couples C et D. Le conjoint de la personne qui l'a fait a serré 0 main en dehors des couples C et D. Cela donne un couple  $(2+2,0+2)=(4,2)$ .

Donc Mme Bourbaki a serré la main à 3 personnes. M. Bourbaki a serré la main à 3 personnes (la personne qui a serré 6 mains, celle qui a serré 5 mains et celle qui a serré 4 mains).

Si, au lieu de trois autres couples, il y en a maintenant  $n$ , les Bourbaki échangent  $n$  poignées de mains.

## 33. Ponts de Königsberg

En 1759, Léonard Euler a montré (dans un article rédigé en latin) qu'il était impossible de trouver un tel trajet. Pour cela on modélise la ville et ses ponts par un graphe où chaque sommet représente une partie de la ville et chaque arête représente un pont.

Supposons qu'on puisse trouver une solution, c'est-à-dire une façon de dessiner le graphe sans lever le crayon. Il y a deux possibilités : soit le trajet est fermé (i.e.=le point de départ est aussi le point d'arrivée) soit il ne l'est pas.

Si le trajet n'est pas fermé, dans le graphe il y a un point de départ, un point d'arrivée et deux "points de passage". Du point de départ il y a un nombre impair de ponts (=d'arêtes) : un premier pour démarrer, puis éventuellement deux supplémentaires (un pour revenir et un pour repartir), ou quatre supplémentaires (2 pour revenir et 2 pour repartir)...

Pour "un point de passage" il y a un nombre pair de ponts : soit deux (un pour venir et un pour repartir), soit quatre (2 pour venir et 2 pour repartir)... Pour le point d'arrivée, tout comme pour le point de départ, il y a un nombre impair de ponts.

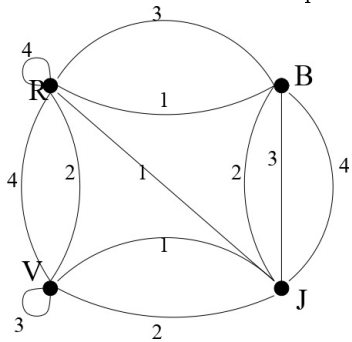
Si le trajet n'est pas fermé il y a donc exactement deux sommets avec un nombre impair d'arêtes. Ce n'est pas le cas de la ville de Königsberg.

Si le trajet est fermé alors le point de départ coïncide avec le point d'arrivée.

Et de ce sommet il part un nombre pair de ponts : un pour démarrer, un pour arriver, puis éventuellement deux supplémentaires (un pour revenir et un pour repartir), ou quatre supplémentaires... Dans ce cas tous les sommets ont un nombre pair d'arêtes. Ce n'est pas le cas de la ville de Königsberg. En conclusion il n'existe aucun trajet passant une fois et une seule par chaque pont.

### 34. Instant insanity

Associer un graphe à chacun des quatre cubes 1couleur = 1 sommet, deux sommets sont reliés par une arête si les couleurs correspondantes sont sur des faces opposées du cube. En superposant les 4 graphes, on obtient le graphe  $G$  de la "colonne" de cubes pour notre "4 cubes" particulier :



Un empilement de ces 4 cubes peut être représenté par un ensemble de deux sous-graphes  $G'$ ,  $G''$  de  $G$  (sans arête commune) comportant chacun 4 arêtes (une arête par dé). Le premier sous-graphe correspond aux faces visibles sur deux côtés opposés de la "colonne", disons les côtés Nord/Sud. Le second

sous-graphe correspond aux faces visibles sur les deux autres côtés, disons Ouest/Est.

Dire que chaque côté de la colonne de 4 cubes présente les 4 couleurs signifie que pour chaque sommet il y a exactement 1 "départ" et une "arrivée" d'arêtes. Considérons un tel empilement, et les sous-graphes  $G'$  et  $G''$  correspondants.

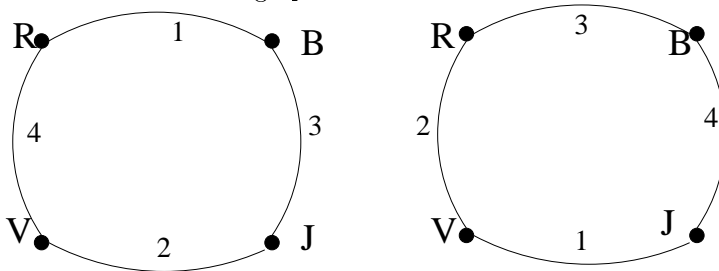
On remarque d'abord que dans les graphes  $G'$  et  $G''$ , il y a forcément une arête reliant  $B$  et  $R$ . En effet, si ce n'était pas le cas, alors il y aurait deux arêtes  $B-J$  et donc on aurait un cycle  $B-J-B$ , mais ceci est impossible car le graphe doit contenir une arête du cube 1, or les arêtes du cube 1 relient les sommets  $B, J$  d'une part et les sommets  $R, V$  d'autre part. Ainsi,  $B$  est forcément relié à  $R$  (par 1 ou par 3) et à  $J$ . Appelons  $G'$  le sous-graphe avec  $B \xrightarrow{1} R$  et  $G''$  le sous-graphe avec  $B \xrightarrow{3} R$ .

Pour le graphe  $G'$ , le sommet  $J$  est relié à  $B$  d'une part et d'autre part à un autre sommet avec une arête ne correspondant pas au cube 1 (car  $G'$  ne contient qu'une seule arête correspondant au cube 1 et c'est l'arête  $B \xrightarrow{1} R$ ). Ceci assure que le graphe  $G'$  comporte l'arête  $J \xrightarrow{2} V$  et donc aussi l'arête  $V \xrightarrow{4} R$  et donc finalement  $B \xrightarrow{3} J$ . Il s'agit donc du graphe

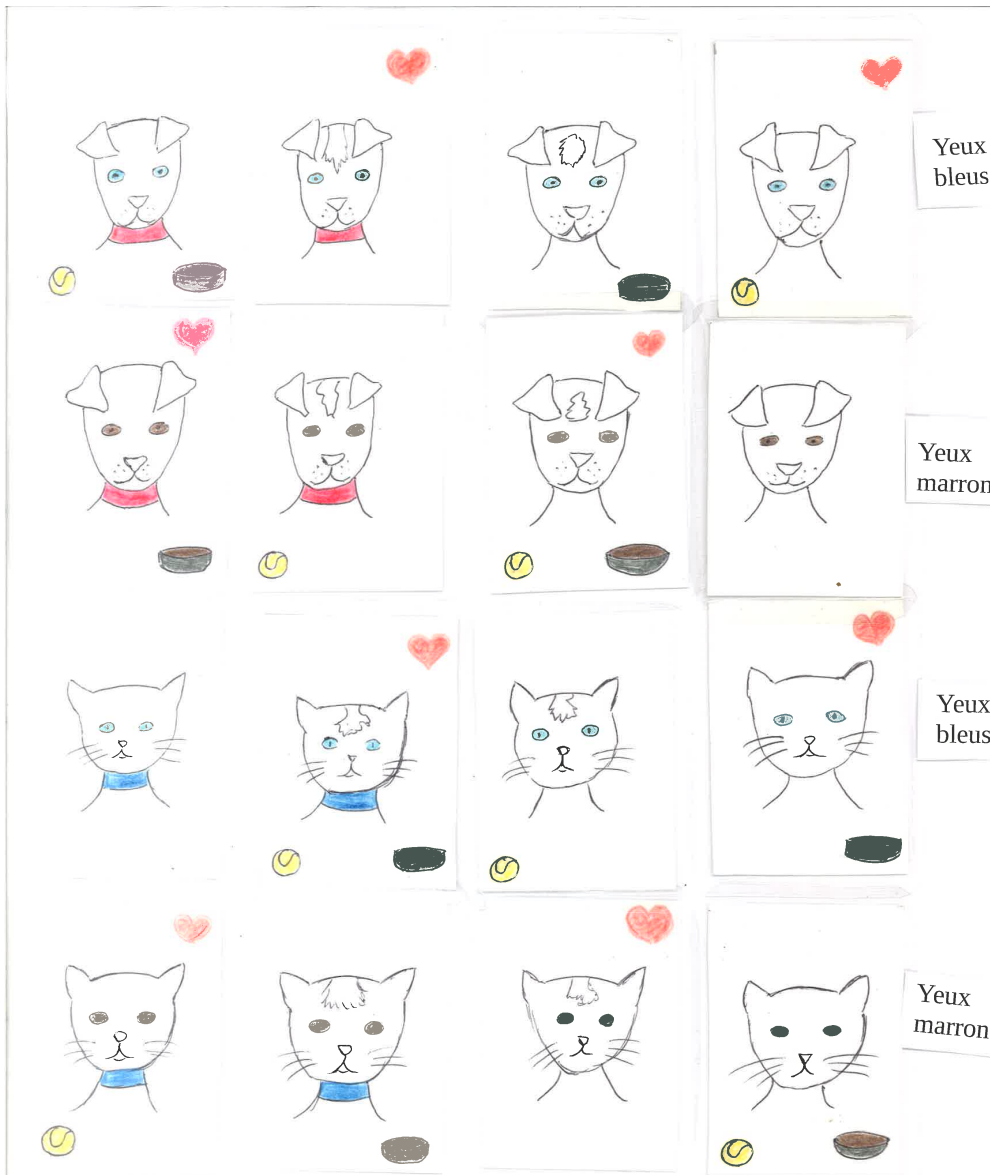
$$B \xrightarrow{1} R \xrightarrow{4} V \xrightarrow{2} J \xrightarrow{3} B$$

Le graphe  $G''$  possède l'arête  $B \xrightarrow{3} R$  (donc aucune autre arête correspondant au cube 3) et aucune arête du graphe  $G'$ . Ainsi  $G''$  possède les arêtes  $V \xrightarrow{1} J$  et  $V \xrightarrow{2} R$ , donc  $J \xrightarrow{4} B$ .

Voici donc les 2 sous-graphes  $G'$  et  $G''$  :







Les 7 questions sont:

- 1- est-ce un chat? Réponse a=1 ou 0
- 2- a-t-il un collier? Réponse b=1 ou 0
- 3- a-t-il les yeux bleus? Réponse c=1 ou 0
- 4- a-t-il une marque sur la tête? Réponse d=1 ou 0
- 5- y a-t-il un coeur? e (correspond à  $b+c+d = 1 \pmod 2$ )
- 6- y a-t-il une balle? f (correspond à  $a+c+d = 1 \pmod 2$ )
- 7- y a-t-il une gamelle? g (correspond à  $a+b+d = 1 \pmod 2$ )

On calcule ensuite:

$$a+c+e+g$$

$$b+c+f+g$$

$$d+e+f+g$$

résultat impair → mensonge.