FONCTIONS LOGARITHME, EXPONENTIELLE ET PUISSANCE

Extrait du programme officiel (2002)

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Introduction de la fonction exponentielle		
Etude de l'équation $f' = kf$. Théorème : «Il existe une unique fonction f dérivable sur telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.» Relation fonctionnelle caractéristique. Introduction du nombre e. Notation e^x . Extension du théorème pour l'équation $f' = kf$.	*L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables telles que $f(x+y) = f(x)f(y)$. On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de f dans le cas $k = 1$; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits. L'unicité sera démontrée. L'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \to e^h$.*	*Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme.*
Etude des fonctions logarithmes et exponentielles		
Fonction logarithme népérien ; notation ln. Equation fonctionnelle caractéristique. Dérivée ; Comportement asymptotique.	*On mentionnera la fonction logarithme décimal, notée log, pour son utilité dans les autres disciplines et son rapport avec l'écriture décimale des nombres. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \to \ln(1+h)$.*	*Le mode d'introduction du logarithme n'est pas imposé. On peut pour l'introduire : - soit partir des propriétés des fonctions exponentielles ; - soit poser le problème des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que $f(xy) = f(x) + f(y)$ et admettre l'existence des primitives pour la fonction $x \to \frac{1}{x}$. - soit traiter le logarithme après l'intégration.*
Fonctions $x \to a^x$ pour $a > 0$. Comportement asymptotique ; allure des courbes représentatives.	*On positionnera, à l'aide d'un grapheur, les courbes représentatives de $x \to e^x$ et de $x \to \ln(x)$ par rapport à celles des fonctions $x \to a^x$.*	
Croissance comparée des fonctions exponentielles, puissances entières et logarithme.	*On établira la limite en $+\infty$ de $\frac{e^x}{x}$ et de $\frac{\ln(x)}{x}$; on en déduira la limite en $-\infty$ de xe^x ; on aboutira aux règles opératoires : «à l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x» et «les puissances de x l'emportent sur le logarithme de x».*	*A travers des exemples, on étendra ces règles au cas des polynômes (comme pour la fonction $x \to \frac{e^x}{x^2+1}$).*
	On étudiera les fonctions $x \to e^{kx}$ ou $x \to e^{kx^2}$, avec $k > 0$, et on illustrera leur décroissance rapide.	*Ces fonctions sont très utilisées en probabilité et en statistique, en théorie du signal, etc.*

Bilan du questionnaire sur les fonctions logarithme, exponentielle et puissance :

Le bilan se base sur 30 réponses.

Séquences d'enseignement :

La fonction exponentielle est vue dès le début de l'année scolaire, comme le préconise le programme officiel. Elle est introduite comme solution d'une équation différentielle de premier ordre.

La fonction logarithme, quant à elle, est introduite plus tard (janvier-février) le plus souvent comme réciproque de la fonction exponentielle (66% des réponses) ou bien comme primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$.

La symétrie des deux courbes est abordée en grande majorité (93% des réponses).

La durée d'enseignement pour chacune de ces fonctions varie de 10h à 18h.

La fonction $x \to e^{kx}$ semble être considérée comme fonction usuelle par les collègues du secondaire, même si elle est vue dans le cours dans quelques cas (30% des réponses) et en exercices pour la plupart (53%).

La fonction $x \to e^{kx^2}$ n'est pas considérée comme une fonction usuelle. Elle semble seulement être l'occasion d'un exercice (20% des réponses).

Enfin, la fonction $x \to a^x$ est vue comme fonction usuelle en grande majorité (73% des réponses), et fait l'objet d'un chapitre du cours à part entière.

Les équations différentielles du second ordre de la forme $y'' + w^2 y = 0$ n'étant plus au programme de Terminale S, elles ne sont pas abordées.

Bilan des acquis :

Trente enseignants ont renseigné le tableau suivant qui reprend des objectifs extraits du programme de Terminale S selon qu'ils estiment que l'objectif est acquis(a), en cours d'acquisition (ca), non acquis(na) par un élève moyen de leur classe, à l'issue de l'année, ou qu'ils ne se prononcent pas (nsp).

	objectifs	**a**	**ca**	**na**	**nsp**
1	Comparer les limites des fonctions ln, expo et puissances.	**16**	14	0	0
2	Lever des indéterminations avec les fonctions ln, expo et puissances.	3	**25**	2	0
3	Intégrer par parties avec la fonction exponentielle	**15**	13	1	1
4	Positionner les courbes $x \to x$, $x \to x^2$, $x \to x^3$ et $x \to \sqrt{x}$	**15**	8	6	1

Analyse du tableau :

On peut remarquer que lever une indétermination avec les fonctions logarithme, exponentielle, et puissance n'est seulement qu'en cours d'acquisition à la fin de la terminale (cf ligne 2). Il est donc difficile de s'appuyer sur ces connaissances à l'entrée à l'université.

Même si l'intégration par parties est considérée comme acquise, elle ne porte que sur des cas simples (cf ligne 3).

Les fonctions de référence vues depuis la seconde ne sont pas forcément maitrisées à la fin de la terminale (cf ligne 4).

Commentaires des collègues sur ce chapitre

Les collègues du secondaire regrettent de ne pas pouvoir collaborer avec le collègue de physique sur ces notions, du fait d'un décalage entre les contenus des deux disciplines.

Notes du groupe

Les lycéens ont une pratique très limitée des équations différentielles, ainsi que des fonctions de type log en base dix.

On peut s'étonner que la fonction $x \to a^x$, vue comme fonction usuelle en Terminale, soit si peu maitrisée à l'entrée à l'université.

Il ressort de cette étude que les connaissances sur le logarithme et l'exponentielle demeurent fragiles, les études se limitant à des cas simples de calculs. Cette constatation est similaire à celle faite sur la fiche concernant les fonctions trigonométriques.